Cálculo Diferencial e Integral

Prof. Ruy Piehowiak

UNIASSELVI
2011

Elaboração:

Prof. Ruy Piehowiak

Revisão, Diagramação e Produção:

Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri

UNIASSELVI – Indaial.

515.43
P613c Piehowiak, Ruy
Cálculo diferencial e integral / Ruy Piehowiak.
Indaial : UNIASSELVI, 2011.

259 p. : il.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7830-421-8

1. Cálculo integral - diferencial
I. Centro Universitário Leonardo da Vinci.
Ensino a Distância. II. Título.

Impresso por:

Apresentação

Seja bem-vindo(a) à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Nesta disciplina você irá conhecer os métodos de Cálculo Diferencial e Integral, que tem como elemento base a função, pois as operações matemáticas no cálculo serão feitas sobre as funções em processos infinitos, para obter, aplicar e generalizar resultados.

Para que serve o Cálculo Diferencial e Integral?

Derivada? Integral? Calma, não é tão difícil quanto parece. São apenas operações matemáticas, que facilitam, e muito, nossas vidas nos dias de hoje.

Portanto, este Caderno de Estudos servirá de rumo para você começar a construir e organizar seus conhecimentos ao longo desse período de estudo.

A disciplina fornece uma série de ferramental necessário a outras disciplinas como, por exemplo, para a Física.

O cálculo é considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. Espero que além de perceber a utilidade, também perceba a beleza matemática. O entendimento do conteúdo e das nuances que circundam este estudo é apenas a ponta do iceberg principalmente para aqueles alunos que pretendem avançar seus estudos como em especialização, mestrado etc.

Prof. Ruy Piehowiak

Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, *tablet* ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo *layout*, você me verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!

Olá acadêmico! Para melhorar a qualidade dos materiais ofertados a você e dinamizar ainda mais os seus estudos, a Uniasselvi disponibiliza materiais que possuem o código *QR Code*, que é um código que permite que você acesse um conteúdo interativo relacionado ao tema que você está estudando. Para utilizar essa ferramenta, acesse as lojas de aplicativos e baixe um leitor de *QR Code*. Depois, é só aproveitar mais essa facilidade para aprimorar seus estudos!

BATE PAPO SOBRE O ENADE!

Olá, acadêmico!

Você já ouviu falar sobre o **ENADE**?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.

Vamos lá!

Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.

Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.

Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.

Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.

Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.

Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!

SUMÁRIO

UNIDADE 1 - LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO 1

TÓPICO 1 - LIMITE DE UMA FUNÇÃO 3
1 INTRODUÇÃO 3
2 CONCEITO DE LIMITE 3
3 DEFINIÇÃO DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO 9
4 PROPRIEDADES DO LIMITE 13
4.1 OPERAÇÕES COM LIMITE 14
RESUMO DO TÓPICO 1 17
AUTOATIVIDADE 18

TÓPICO 2 - LIMITES INDETERMINADOS E LATERAIS 19
1 INTRODUÇÃO 19
2 INDETERMINAÇÃO 19
3 LIMITES LATERAIS 26
RESUMO DO TÓPICO 2 34
AUTOATIVIDADE 35

TÓPICO 3 - MAIS UM POUCO DE LIMITES 37
1 INTRODUÇÃO 37
2 LIMITES NO INFINITO 37
3 CÁLCULO DE LIMITES NO INFINITO 38
4 LIMITES INFINITOS 44
5 LIMITES FUNDAMENTAIS 51
RESUMO DO TÓPICO 3 58
AUTOATIVIDADE 60

TÓPICO 4 - CONTINUIDADE 63
1 INTRODUÇÃO 63
2 DEFINIÇÃO DE CONTINUIDADE 63
3 CONTINUIDADE EM UM INTERVALO 69
4 CONTINUIDADE DOS POLINÔNIOS E DAS FUNÇÕES RACIONAIS 70
5 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO 71
LEITURA COMPLEMENTAR 74
RESUMO DO TÓPICO 4 77
AUTOATIVIDADE 78

UNIDADE 2 - DERIVADA 81

TÓPICO 1 - DERIVADA DE UMA FUNÇÃO 83
1 INTRODUÇÃO 83
2 CONCEITO DE DERIVADA 83
3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA 88
4 DERIVADAS LATERAIS 91

5 CÁLCULO DAS DERIVADAS – REGRAS DE DERIVAÇÃO **95**
RESUMO DO TÓPICO 1 .... **100**
AUTOATIVIDADE **101**

TÓPICO 2 - DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA **103**
1 INTRODUÇÃO **103**
2 DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA – REGRA DA CADEIA **103**
2.1 DERIVADA DE POTÊNCIAS DE x 105
2.2 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL 106
2.3 DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA 107
2.4 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPOSTA 108
2.5 DERIVADA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 108
3 DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA **110**
RESUMO DO TÓPICO 2 .... **113**
AUTOATIVIDADE **114**

TÓPICO 3 - DERIVADA DE FUNÇÕES IMPLÍCITAS E ALGUMAS APLICAÇÕES **115**
1 INTRODUÇÃO **115**
2 DERIVADAS IMPLÍCITAS **115**
3 DERIVADAS SUCESSIVAS (OU DE ORDEM SUPERIOR) **119**
4 TAXA DE VARIAÇÃO **121**
5 TAXAS RELACIONADAS **124**
RESUMO DO TÓPICO 3 .... **127**
AUTOATIVIDADE **128**

TÓPICO 4 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES I **129**
1 INTRODUÇÃO **129**
2 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES **129**
3 MÁXIMOS E MÍNIMOS **131**
4 CONCAVIDADE **133**
5 PONTOS DE INFLEXÃO **134**
RESUMO DO TÓPICO 4 .... **137**
AUTOATIVIDADE **138**

TÓPICO 5 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES II **139**
1 INTRODUÇÃO **139**
2 TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA **139**
3 TESTE DA DERIVADA SEGUNDA **141**
4 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS **142**
5 ESBOÇO DO GRÁFICO **144**
RESUMO DO TÓPICO 5 .... **149**
AUTOATIVIDADE **150**

TÓPICO 6 - APLICAÇÕES DA DERIVADA **151**
1 INTRODUÇÃO **151**
2 TEOREMAS **151**
2.1 TEOREMA DE ROLLE 151
2.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO 152
3 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO **154**
4 REGRAS DE L’HOSPITAL **159**
LEITURA COMPLEMENTAR **162**
RESUMO DO TÓPICO 6 .... **166**
AUTOATIVIDADE **167**

UNIDADE 3 - INTEGRAÇÃO ... 169

TÓPICO 1 - INTRODUÇÃO À INTEGRAL ... 171
1 INTRODUÇÃO ... 171
2 INTRODUÇÃO À INTEGRAL ... 171
3 INTEGRAL INDEFINIDA ... 171
4 PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA ... 174
5 INTEGRAIS IMEDIATAS ... 175
6 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO ... 177
RESUMO DO TÓPICO 1 ... 186
AUTOATIVIDADE ... 187

TÓPICO 2 - DEFININDO ÁREA COMO UM LIMITE ... 189
1 INTRODUÇÃO ... 189
2 O CONCEITO DE ÁREA ... 189
3 INTEGRAL DEFINIDA ... 190
3.1 SOMA DE RIEMANN ... 190
3.2 ÁREA SOB UMA CURVA ... 192
4 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA ... 193
5 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO ... 194
RESUMO DO TÓPICO 2 ... 200
AUTOATIVIDADE ... 201

TÓPICO 3 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA ... 203
1 INTRODUÇÃO ... 203
2 ÁREA ENTRE CURVAS ... 203
3 VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ... 210
3.1 VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO X ... 210
3.2 VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO Y ... 213
4 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO ... 215
RESUMO DO TÓPICO 3 ... 218
AUTOATIVIDADE ... 219

TÓPICO 4 - MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO I ... 221
1 INTRODUÇÃO ... 221
2 INTEGRAÇÃO POR PARTES ... 222
3 INTEGRAIS ENVOLVENDO POTÊNCIAS DE SENO E COSSENO ... 228
3.1 M ÍMPAR ... 229
3.2 N ÍMPAR ... 230
3.3 M, N PAR ... 231
4 INTEGRAIS DE REDUÇÃO OU RECORRÊNCIA ... 233
RESUMO DO TÓPICO 4 ... 237
AUTOATIVIDADE ... 239

TÓPICO 5 - MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO II ... 241
1 INTRODUÇÃO ... 241
2 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS ... 241
3 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS ... 247
LEITURA COMPLEMENTAR ... 252
RESUMO DO TÓPICO 5 ... 255
AUTOATIVIDADE ... 256
REFERÊNCIAS ... 257

UNIDADE 1

LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade, você será capaz de:

- expressar algebricamente a definição de função intuitivamente;
- aplicar os conceitos que envolvem limites de funções;
- calcular limites de funções através dos teoremas estudados;
- resolver limites quando ocorrer um tipo de indeterminação;
- analisar a continuidade de uma função no ponto $x = a$;
- aplicar o Teorema do Valor Intermediário;
- saber aplicar a definição de limite, que serve de base para os demais conceitos de cálculo.

PLANO DE ESTUDOS

Esta unidade está dividida em quatro tópicos, apresentando os conceitos e os principais teoremas sobre limites de função.
O primeiro tópico inicia mostrando intuitivamente o conceito de limite a ser estudado nos Tópicos 1, 2 e 3. Em cada tópico são apresentados conceitos e teoremas seguidos de diversos exemplos para auxiliá-lo(a) na compreensão e resolução dos exercícios propostos no final de cada tópico.
E ainda é apresentado um resumo do tópico e um texto complementar contendo um teorema e sua demonstração.

TÓPICO 1 – LIMITE DE UMA FUNÇÃO

TÓPICO 2 – LIMITES INDETERMINADOS E LATERAIS

TÓPICO 3 – MAIS UM POUCO DE LIMITES

TÓPICO 4 – CONTINUIDADE

Assista ao vídeo desta unidade.

TÓPICO 1

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

1 INTRODUÇÃO

O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças em grande parte à invenção do cálculo, realizada por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

O estudo do problema da reta tangente motivou o desenvolvimento do cálculo diferencial, que se baseia no conceito de derivada de uma função. Por outro lado, o estudo do problema da área levou à criação do cálculo integral, que se baseia no conceito de antiderivada de uma função.

2 CONCEITO DE LIMITE

É com base nisso que pretendemos apresentar uma noção intuitiva de limite, para que você possa observar o que ocorre com a função $f(x)$, intuitivamente, quando x tende para mais ou menos infinito, por exemplo. Usaremos limites para definir retas tangentes a gráficos de função. Com o limite de uma função também é possível descobrir o que ocorre com a função num determinado ponto.

Vamos considerar a função f(x) definida pela expressão $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Queremos saber o que ocorre com f(x) quando x assume valores (positivos ou negativos) arbitrariamente grandes, ou seja, x tende para $+\infty$, $x > 0$ e x tende para $-\infty$, $x < 0$. Observamos no quadro a seguir, quando x cresce o que está acontecendo com a função f(x).

x	$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
1	2
2	1,5
3	1,333
500	1,002
$\vdots$	
1000	1,001
$\vdots$	
10000	1,0001
$\vdots$	

Quando x cresce, ou seja, x tende para $+\infty$, a função $f(x)$ aproxima-se cada vez mais do número 1.

Observe, no quadro a seguir, o que está acontecendo com a função $f(x)$ quando o valor absoluto de x decresce (para valores negativos de x).

X	$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
-1	0
-2	0,5
-3	0,666
-100	0,99
$\vdots$	
-1000	0,998
$\vdots$	
-10000	0,9998
$\vdots$	

Quando o valor absoluto de x decresce, para valores negativos de x, ou seja, quando x tende para $-\infty$, a função $f(x)$ aproxima-se do número 1.

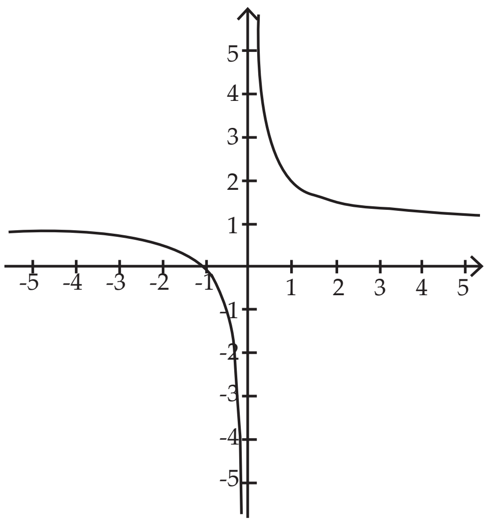
Assim, concluímos dos dois quadros, que quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, a função $f(x)$ tende para 1 e escrevemos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Lê-se o limite da função f(x) quando x tende para **+** ∞ é 1, assim como o limite da função f(x) quando x tende para - ∞. Ou ainda, quando $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 1$.

Agora, veja na figura a seguir como é o gráfico da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

FIGURA 1 - GRÁFICO 1.1



FONTE: O autor

Agora consideramos a função $f(x)$ definida pela expressão $f(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$, para $x \neq 3$.

Queremos verificar o que ocorre com $f(x)$ quando x assume valores próximos de 3. Observemos, no quadro a seguir, o que acontece com a função $f(x)$, quando x aproxima-se de 3 com valores maiores que 3.

x	$f(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$
5	-0,25
4	-1
3,5	-4
3,1	-100
3,01	-10000
3,001	-1000000
$\vdots$	

Então, quando x tende a 3 com valores maiores que 3, a função $f(x)$ assume valores arbitrariamente grandes em módulo. Simbolicamente, $x \to 3$ com $x > 3$ enquanto que $f(x) \to -\infty$.

Observemos, no quadro a seguir, o que está acontecendo com a função $f(x)$, quando x aproxima-se de 3 com valores menores que 3.

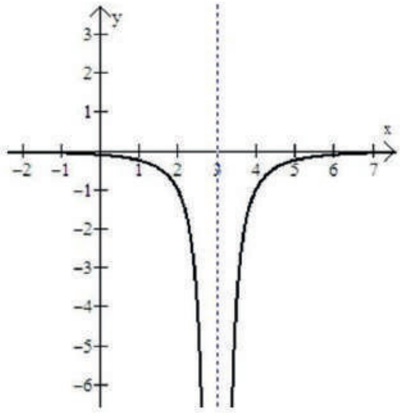
x	$f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$
1	-0,25
2	-1
2,5	-4
2,9	-100
2,99	-10000
2,999	-1000000
$\vdots$	

Então, quando x tende 3 com valores menores que 3, a função $f(x)$ assume valores arbitrariamente grandes em módulo. Simbolicamente, $x \to 3$ com $x < 3$ enquanto que $f(x) \to -\infty$.

Assim, verificando os dois quadros (e também a figura 2) concluímos que, quando x tende para 3, a função $f(x)$ tende para $-\infty$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = -\infty$$

FIGURA 2 – GRÁFICO 1.2



FONTE: O autor

Vamos analisar outra situação: a função $f(x)$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<0\\ x^2, & 0\le x<2\\ 3-x, & x>2\end{cases}$

Queremos analisar o que ocorre com $f(x)$ quando x assume valores próximos de 2. Observamos, no quadro a seguir, o que está acontecendo com a função $f(x)$ quando x aproxima-se de 2 com valores maiores que 2. Para a construção da tabela temos que ver qual sentença pegar, já que a função é dada por três sentenças. Neste caso, para $x > 2$ usaremos $f(x) = 3 - x$.

x	f(x) = 3 - x
4	-1
3	0
2,5	0,5
2,1	0,9
2,01	0,99
2,001	0,999
⋮	

Então, quando x vai aproximando-se de 2 com valores maiores que 2, a função $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos do número 1. Simbolicamente, $x \to 2$ com $x > 2$ enquanto que $f(x) \to 1$.

Observamos, no quadro a seguir, o que está acontecendo com a função $f(x)$, quando x aproxima-se de 2 com valores menores que 2 e maiores ou igual a zero. Aqui, usaremos a sentença $f(x) = x^2$.

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
1,5	2,25
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
⋮	

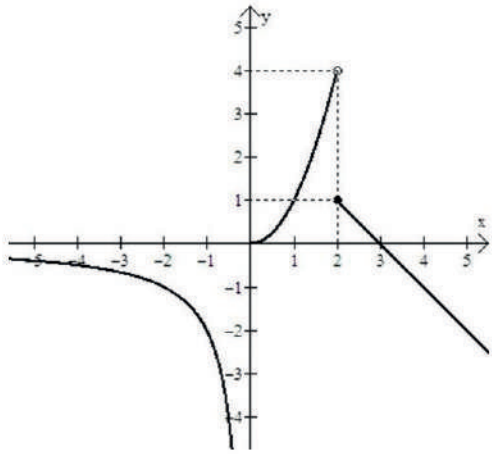
Então, quando x vai aproximando-se de 2 com valores menores que 2 ou igual a zero, a função $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos do número 4. Simbolicamente, $x \to 2$

com $x < 2$ enquanto que $f(x) \to 4$.

Assim, verificando os dois quadros (e também a figura 3) concluímos que, quando x tende para 3, a função $f(x)$ tende para valores diferentes e escrevemos:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3 - x) = 1 \text{ e } \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

FIGURA 3 – GRÁFICO 1.3



FONTE: O autor

Vamos examinar o "limite" de uma função numa outra situação.

Como a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ se comporta próximo de $x = 3$?

Observando a função, vemos que se trata de uma função do tipo racional, na qual seu conjunto domínio é formado por todos os números reais exceto em $x = 3$, pois para $x = 3$, a função não é definida. Com isso, para qualquer $x \neq 3$, podemos simplificar a função fatorando o numerador e cancelando os fatores comuns:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x + 3 \text{ para } x \neq 3.$$

x	$f(x) = x + 3$
2,5	5,5
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999

Agora, atribuindo a x valores próximos de 3, porém maiores que 3, temos:

x	$f(x) = x + 3$
3,5	6,5
3,1	6,1
3,01	6,01
3,001	6,001

Observamos em ambos os quadros que, quando x se aproxima cada vez mais de 3, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 6. Matematicamente, dizemos que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 6 conforme x se aproxima de 3 ou, simplesmente, que $f(x)$ se aproxima do limite 6 quando x se aproxima de 3. Portanto,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

3 DEFINIÇÃO DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Definição 1.1.1 Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de a, exceto possivelmente em a. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para a e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, para cada número $\varepsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x com $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definição é uma maneira técnica de expressar a ideia de limite que mostramos nas duas funções anteriormente. Vamos entender alguns elementos na definição.

Assim, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quer dizer que podemos tornar o módulo da diferença tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos o módulo $0 < |x - a| < \delta$ para um δ suficientemente pequeno, de tal modo que $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Voltamos à função analisada anteriormente, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ próximo de $x = 3$.

Com base nos dois quadros calculados, verificamos que:

$x = 2{,}9 \Rightarrow f(x) = 5{,}9$ isto é, $x - 3 = 2{,}9 - 3 = -0{,}1 \Rightarrow f(x) - 6 = 5{,}9 - 6 = -0{,}1$
$x = 2{,}99 \Rightarrow f(x) = 5{,}99$ isto é, $x - 3 = 2{,}99 - 3 = -0{,}01 \Rightarrow f(x) - 6 = 5{,}99 - 6 = -0{,}01$
$x = 2{,}999 \Rightarrow f(x) = 5{,}999$ isto é, $x - 3 = 2{,}999 - 3 = -0{,}001 \Rightarrow f(x) - 6 = 5{,}999 - 6 = -0{,}001$

e também,

$x = 3{,}1 \Rightarrow f(x) = 6{,}1$ isto é, $x - 3 = 3{,}1 - 3 = 0{,}1 \Rightarrow f(x) - 6 = 6{,}1 - 6 = 0{,}1$
$x = 3{,}01 \Rightarrow f(x) = 6{,}01$ isto é, $x - 3 = 3{,}01 - 3 = 0{,}01 \Rightarrow f(x) - 6 = 6{,}01 - 6 = 0{,}01$
$x = 3{,}001 \Rightarrow f(x) = 6{,}001$ isto é, $x - 3 = 3{,}001 - 3 = 0{,}001 \Rightarrow f(x) - 6 = 6{,}001 - 6 = 0{,}001$

Portanto, podemos reescrever da seguinte forma:

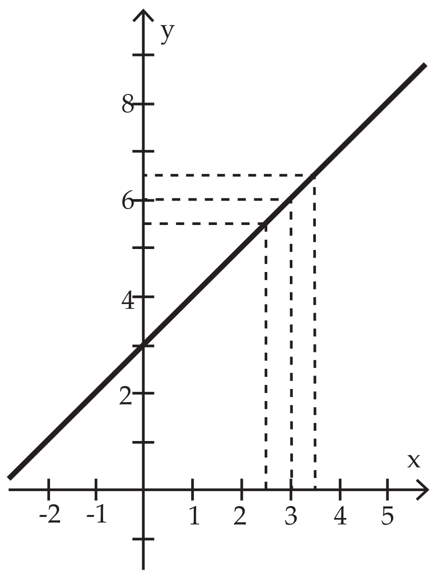
$|x - 3| = 0{,}1 \Rightarrow |f(x) - 6| = 0{,}1$
$|x - 3| = 0{,}01 \Rightarrow |f(x) - 6| = 0{,}01$
$|x - 3| = 0{,}001 \Rightarrow |f(x) - 6| = 0{,}001$

Então se for dado $\varepsilon = 0{,}1$, tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos que:

$0 < |x - 3| < 0{,}1 \Rightarrow |f(x) - 6| < 0{,}1$.

Vamos ver como é o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

FIGURA 4 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Considere a função $f(x) = 5 - 2x$.

Encontre $\delta > 0$ tal que $|f(x) + 3| < 0{,}02$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$.

Mostre, usando a Definição 1.1.1, que o limite $\lim\limits_{x \to 4} (5 - 2x) = -3$.

***Resolução*:**

a) Temos que determinar um $\delta > 0$ que sirva para $\varepsilon = 0{,}02$. Conforme a Definição 1.1.1 isso vale para todo x ($x \neq 4$), $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(5 - 2x) - (-3)| < 0{,}02$.

Então,

$$
\begin{aligned}
&|f(x) + 3| < 0{,}02 \Leftrightarrow |(5 - 2x) - (-3)| < 0{,}02 \\
&\Leftrightarrow |(5 - 2x + 3)| < 0{,}02 \\
&\Leftrightarrow |-2x + 8| < 0{,}02 \\
&\Leftrightarrow |-2\,(x - 4)| < 0{,}02 \\
&\Leftrightarrow 2.|x - 4| < 0{,}02 \\
&\Leftrightarrow |x - 4| < 0{,}01
\end{aligned}
$$

Assim, $0 < |x - 4| < 0{,}01 \Rightarrow |f(x) + 3| < 0{,}02$.

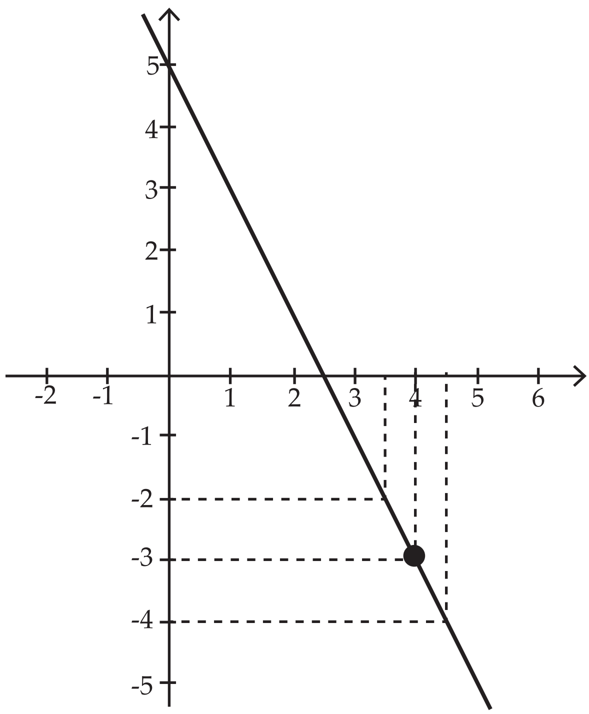
Portanto, $\delta = 0{,}01$.

b) Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x)+3| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-4| < \delta$. Tomando $x \neq 4$, temos

$$|f(x)+3| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |(5-2x)+3| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 2.|x-4| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x-4| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, quando $0 < |x-4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)+3| < \varepsilon$. Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Logo, $\lim\limits_{x \to 4} (5-2x) = -3$.

FIGURA 5 – FUNÇÃO DO EXEMPLO 1



FONTE: O autor

Exemplo 2:

Para o limite $\lim_{x\to 7}\sqrt{x+2}=3$, determine um $\delta > 0$ que sirva para $\varepsilon = 0{,}1$.

***Resolução*:**

Caros acadêmicos, percebam o que a questão pede: um $\delta > 0$ tal que para todo *x*, $0<|x-7|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x+2}-3\right|<0{,}1$.

Para obter o δ, vamos fazer duas etapas. Primeiramente, desenvolveremos a inequação $\left|\sqrt{x+2}-3\right|<\varepsilon$ a fim de encontrar um intervalo em torno de *a* = 7, no qual a desigualdade valha para todo $x \neq a$. Então, encontraremos um valor de δ > 0 que coloca o intervalo $7-\delta<x<7+\delta$ dentro do intervalo obtido pela primeira inequação.

$$\left|\sqrt{x+2}-3\right|<0{,}1$$

$$-0{,}1<\sqrt{x+2}-3<0{,}1$$

$$-0{,}1+3<\sqrt{x+2}-3+3<0{,}1+3$$

$$2{,}9<\sqrt{x+2}-3<3{,}1$$

$$(2{,}9)^2<(\sqrt{x+2})^2<(3{,}1)^2$$

$$8{,}41<x+2<9{,}61$$

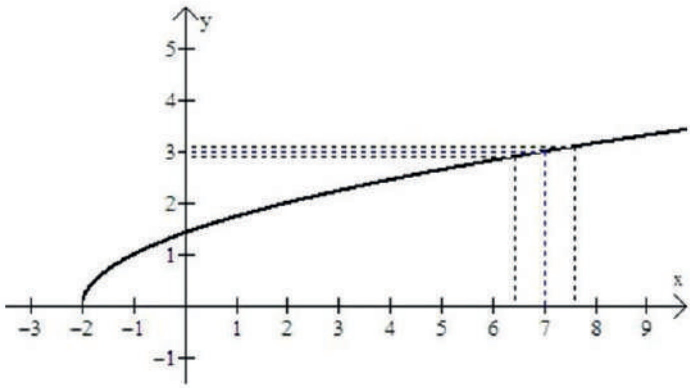
$$8{,}41-2<x+2-2<9{,}61-2$$

$$6{,}41<x<7{,}61$$

A desigualdade vale para todo *x* no intervalo aberto (6,41; 7,61), portanto ela vale para todo $x \neq 7$ nesse intervalo.

Segunda etapa: determinar δ > 0 para colocar o intervalo centrado $7-\delta<x<7+\delta$ dentro do intervalo 6,41 < x < 7,61. A distância de 7 até o ponto final mais próximo de (6,41; 7,61) é 0,59 (figura 6). Se tomarmos δ = 0,59 ou qualquer outro número positivo menor, então a desigualdade $0<|x-7|<\delta$ colocará *x* automaticamente entre 6,41 e 7,61 fazendo $\left|\sqrt{x+2}-3\right|<0{,}1$, ou seja, $0<|x-7|<0{,}59 \Rightarrow \left|\sqrt{x+2}-3\right|<0{,}1$

FIGURA 6 – FUNÇÃO E INTERVALO DO EXEMPLO 2



FONTE: O autor

AUTOATIVIDADE

Caro(a) acadêmico(a), sugerimos que você determine valores para delta δ, como mostramos acima, tendo como valores para épsilon $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}001$.

ATENÇÃO

Observe que ainda não calculamos o limite de uma função, apenas fizemos análises e verificamos o limite intuitivamente. As duas proposições acima e as propriedades listadas a seguir serão essenciais para calcular o limite.

4 PROPRIEDADES DO LIMITE

Teorema 1.1.1 (Unicidade do limite) Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e , $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então $L = M$.

UNI

Caro(a) acadêmico(a), é importante que você perceba o significado deste Teorema, ele quer dizer que se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então ele é único.

Proposição 1.1.1 Se a, m e n são números reais, então $\lim\limits_{x\to a} mx+n=ma+n$.

4.1 OPERAÇÕES COM LIMITE

Principais propriedades dos limites:

Se L, M, a, c são números reais e $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, então:

a) $\lim\limits_{x\to a} c=c,\ c\in IR$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$

c) $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=c.L,\ \forall c\in IR$

d) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=L.M$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M},\ se\ M\neq 0$

f) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n$, para todo n inteiro

g) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$, desde que $L>0$ e n for par

h) $\lim\limits_{x\to a} sen[f(x)]=sen\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]=sen\,(L)$

i) $\lim\limits_{x\to a}\cos[f(x)]=\cos\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]=\cos\,(L)$

j) $\lim\limits_{x\to a} e^{[f(x)]}=e^{\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]}=e^L$

k) $\lim\limits_{x\to a}\ln[f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]=\ln L$

Exemplo 3:

Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-9x+5\right)$, usando as propriedades.

Resolução:

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2-9x+5\right)=\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}\left(-9x+5\right)$$ Regras da soma e da diferença

$$=3\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}\left(-9x+5\right)$$ Regra do produto por uma constante

$$=3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+\lim_{x\to 2}\left(-9x+5\right)$$ Regra da potência

$$=3.2^2-9.2+5$$ Proposição 1.1.1

$$=-1$$

Portanto, $\lim_{x\to 2}\left(3x^2-9x+5\right)=-1$

Exemplo 4:

Calcule o limite $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x}{4-x^3}$, usando as propriedades.

Resolução:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x}{4-x^3}=\frac{\lim_{x\to -1}\left(x^2+7x\right)}{\lim_{x\to -1}\left(4-x^3\right)}$$ Regra do quociente

$$=\frac{\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}7x}{\lim_{x\to -1}4-\lim_{x\to -1}x^3}$$ Regra da soma e da diferença

$$=\frac{\left(\lim_{x\to -1}x\right)^2+\lim_{x\to -1}7x}{\lim_{x\to -1}4-\left(\lim_{x\to -1}x\right)^3}$$ Regra da potência

$$=\frac{(-1)^2+7.(-1)}{4-(-1)^3}$$ Proposição 1.1.1

$$=-\frac{6}{5}$$

Portanto, $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+7x}{4-x^3}=-\frac{6}{5}$

Exemplo 5:

Calcule o limite $\lim_{x\to 0}\left(5e^x+\operatorname{sen}x+4\cos x\right)$, usando as propriedades.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(5e^{x}+\operatorname{sen} x+4\cos x\right) &= \lim_{x\to 0} 5e^{x}+\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x+\lim_{x\to 0} 4\cos x && \text{Regras da soma e da diferença}\\
&= 5\lim_{x\to 0} e^{x}+\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x+4\lim_{x\to 0}\cos x && \text{Regra do produto por uma constante}\\
&= 5e^{\lim\limits_{x\to 0} x}+\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0} x\right)+4\cos\left(\lim_{x\to 0} x\right) && \text{Regras da exponencial e seno}\\
&= 5.e^{0}+\operatorname{sen} 0+4\cos 0 && \text{Proposição 1.1.1}\\
&= 9
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left(5e^{x}+\operatorname{sen} x+4\cos x\right)=9$

Exemplo 6:

Calcule o limite $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{x^{4}+9x^{3}+10x^{2}-x+5}$, usando as propriedades.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{x^{4}+9x^{3}+10x^{2}-x+5} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to -3}\left(x^{4}+9x^{3}+10x^{2}-x+5\right)} && \text{Regra da raiz}\\
&= \sqrt[3]{\lim_{x\to -3} x^{4}+\lim_{x\to -3} 9x^{3}+\lim_{x\to -3} 10x^{2}+\lim_{x\to -3}\left(-x+5\right)} && \text{Regras da soma e da diferença}\\
&= \sqrt[3]{\lim_{x\to -3} x^{4}+9\lim_{x\to -3} x^{3}+10\lim_{x\to -3} x^{2}+\lim_{x\to -3}\left(-x+5\right)} && \text{Regra do produto por uma constante}\\
&= \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to -3} x\right)^{4}+9\left(\lim_{x\to -3} x\right)^{3}+10\left(\lim_{x\to -3} x\right)^{2}+\lim_{x\to -3}\left(-x+5\right)} && \text{Regras da potência}\\
&= \sqrt[3]{(-3)^{4}+9(-3)^{3}+10(-3)^{2}-(-3)+5} && \text{Proposição 1.1.1}\\
&= \sqrt[3]{-64}\\
&= -4
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{x^{4}+9x^{3}+10x^{2}-x+5}=-4$

O conceito e o cálculo do limite como mostrado acima é de fundamental importância para a sequência do estudo. Assim, procure esclarecer todas as dúvidas que surgirem com o tutor para a compreensão do conteúdo.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você viu inicialmente o limite de forma intuitiva. Em seguida, estudou a definição de limite, as proposições e as propriedades.

- Vamos recordar as propriedades do limite.

Se *L*, *M*, *a*, *c* são números reais e $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então:

a) $\lim_{x\to a} c = c,\ c \in IR$

b) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

c) $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x) = c.L,\ \forall c \in IR$

d) $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L.M$

e) $\lim_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M},\ se\ M \neq 0$

f) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$, para todo *n* inteiro

g) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, desde que L > 0, e *n* for par

h) $\lim_{x\to a} sen[f(x)] = sen\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = sen\,(L)$

i) $\lim_{x\to a} \cos[f(x)] = \cos\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \cos(L)$

j) $\lim_{x\to a} e^{[f(x)]} = e^{\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]} = e^{L}$

k) $\lim_{x\to a} \ln[f(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \ln L$

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios de 1 a 3, calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ fazendo um quadro de valores.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$ em $a = -7$.

2) $f(x) = \sqrt{5 - x}$ em $a = 4$.

3) $f(x) = \dfrac{2 - x}{4 - x^2}$ em $a = 2$.

4) Seja $f(x) = 2x - 2$ e os números $L = -6$, $a = -2$ e $\varepsilon = 0{,}02$. Encontre um intervalo aberto em torno de a no qual a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ valha. Dê então um valor para $\delta > 0$ tal que, para todo x satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ seja verdadeira.

5) Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e os números $L = 2$, $a = 4$ e $\varepsilon = 0{,}25$. Encontre um intervalo aberto em torno de a no qual a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ valha. Dê então uma valor para $\delta > 0$ tal que, para todo x satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ seja verdadeira.

Nos exercícios de 6 a 12, calcule os limites usando as propriedades de limites.

6) $\lim_{x \to -2} \left(x^3 - 2x^2 + 4x + 8\right)$

7) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 12x + 36}{x - 5}$

8) $\lim_{x \to -3} \log\left(x^4 - 3x + 10\right)$

9) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5}$

10) $\lim_{x \to -2} \sqrt{5x^2 + 3x + 2}$

11) $\lim_{x \to -\pi} e^{\operatorname{sen} x}$

12) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x - 2}}{3x - \cos(\pi x)}$

Assista ao vídeo de resolução da questão 2

Assista ao vídeo de resolução da questão 12

TÓPICO 2

LIMITES INDETERMINADOS E LATERAIS

1 INTRODUÇÃO

Neste tópico vamos entender o que vem a ser indeterminação. Por exemplo, se considerarmos os limites $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x^3}{x}$ e $\lim\limits_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7}$ e calcularmos estes limites usando a propriedade do limite do quociente (e), chegaremos à expressão $\frac{0}{0}$ que não possui significado, pois $\frac{0}{0}$ não é número algum. Por outro lado, que a resolução destes limites é possível:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} 5x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7} = \lim_{x \to -7} \frac{(x+7)(x-7)}{x+7} = \lim_{x \to -7} (x - 7) = -14$$

2 INDETERMINAÇÃO

Observe que os dois limites têm resultados diferentes. Assim, fica evidente que a expressão $\frac{0}{0}$ não pode ter um valor determinado.

Vamos supor quetenha um valor, ou seja, $\frac{0}{0} = k, \ \forall k \in IR$.

Então, $\frac{0}{0} = k \ \Rightarrow \ 0 = 0.k$. A segunda igualdade apenas não é verdadeira se k = 0. Ou seja, o que estamos querendo dizer é que, por exemplo, $\frac{0}{0} = 5$ ou $\frac{0}{0} = -7$ ou $\frac{0}{0} = \frac{3}{2}$ ou... é por este motivo que esta expressão é dita uma indeterminação, ou um símbolo de indeterminação.

Até agora, calculamos limites do quociente entre duas funções aplicando o item (e) das propriedades de limites. Mas, vimos que podem ocorrer situações em que você, usando as propriedades, encontre $\frac{0}{0}$. Cuidado quando isto ocorrer: o limite nunca é $\frac{0}{0}$. Neste caso, o que fazer? É o que veremos a seguir: neste processo utilizaremos alguns artifícios algébricos.

Calculando limites de funções, podemos também chegar a outras expressões cujo significado, ou valor, não é determinado. Ao todo são sete os símbolos de indeterminação: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ e ∞^0.

Sempre que no cálculo de um limite você chegar a um destes símbolos, deve buscar alguma alternativa para obter o valor do limite usando artifícios algébricos. A este trabalho dá-se o nome de levantamento de uma indeterminação.

Nosso objetivo aqui é "**levantar**" uma indeterminação, que é uma expressão sem sentido que se obtém ao tentar calcular um limite. Vamos então calcular os limites.

Exemplo 1:

Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Resolução:

Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item (e) das propriedades (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite zero), você chegará à indeterminação $\frac{0}{0}$. Neste caso, o artifício algébrico usado para "**levantar**" a indeterminação obtida é a FATORAÇÃO.

Para fatorar o denominador $x^2 - 9$ vamos utilizar o produto notável da forma $a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$.

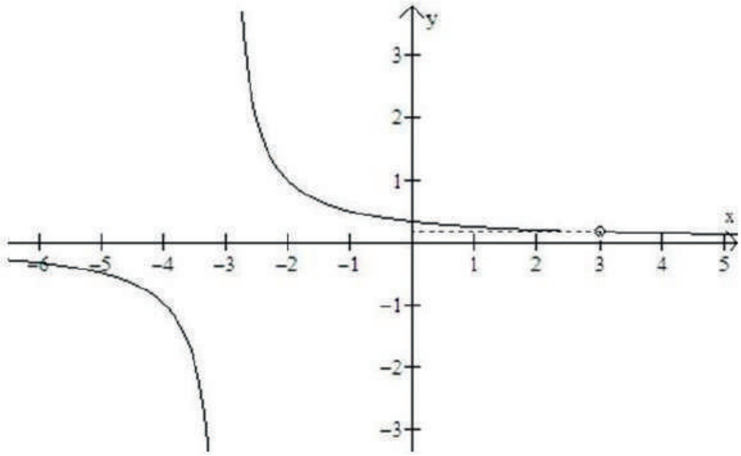
Assim, você tem $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3).(x + 3)$..

Desta forma, o limite dado será igual a

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Portanto, $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$.

FIGURA 7 – GRÁFICO 2.1



FONTE: O autor

Observe que no gráfico (figura 7) fica evidente a não existência da imagem para $x = 3$, representada por uma bolinha aberta sobre a curva.

Caro(a) acadêmico(a), na resolução do exemplo 1 necessitamos fatorar o polinômio. Caso não se recorde deste procedimento, é importante consultar algum livro do Ensino Fundamental que aborde este tema.

Exemplo 2:

Calcular $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$.

Resolução:

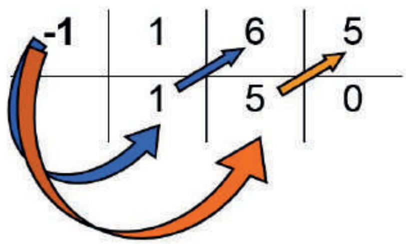
Se no cálculo deste limite você tentar utilizar o item (e) das propriedades (que não pode ser aplicado aqui, pois o denominador tem limite zero), você chegará à indeterminação $\frac{0}{0}$. Neste caso, o artifício algébrico usado para levantar a indeterminação obtida é a FATORAÇÃO.

Existem algumas formas de obter os binômios a fim de que eles, multiplicados, resultem no polinômio de 2º grau. Isto é, $x^2+bx+c=(x-\alpha).(x-\beta)$.

Para fatorar os polinômios, vamos recordar o estudo sobre as raízes de um polinômio. Quando $\frac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional para a qual $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$, o numerador e o denominador necessariamente possuem um ou mais fatores comuns de $x - \alpha$. Nesse caso, o limite de $\frac{p(x)}{q(x)}$ quando $x \to \alpha$ pode ser simplificado os fatores comuns e calculado o limite da função simplificada.

Na decomposição de um polinômio, pode-se usar o método de Briot-Ruffini, já que uma das raízes do polinômio é conhecida.

Primeiramente aplicaremos o método de Briot-Ruffini em $x^2 + 6x + 5$, sabendo que $x = -1$ é raiz do polinômio. Assim, $x^2 + 6x + 5 = (x - (-1)).(x - \beta) = (x + 1).(x - \beta)$ temos que encontrar o outro binômio usando o método.



1º) Colocam-se os coeficientes do polinômio na primeira linha a partir da segunda coluna. Neste caso; 1, 6, 5.

2º) Na primeira linha, primeira coluna, coloca-se a raiz do polinômio. Raiz: -1.

3º) Na segunda linha, segunda coluna, repete-se o primeiro coeficiente do polinômio. Neste caso; 1.

4º) Para encontrar o próximo coeficiente, na segunda linha, calcula-se fazendo: $(-1).1 + 6 = 5$.

5º) Repete-se este cálculo para os próximos coeficientes; $(-1).5 + 5 = 0$.

6º) Se o número obtido na segunda linha, abaixo do último coeficiente do polinômio for **zero**, então o número que foi colocado na primeira linha, primeira coluna é raiz do polinômio. E, consequentemente, os números obtidos na segunda linha são os coeficientes do binômio procurado.

Logo, o binômio procurado é $x + 5$ e assim, $x^2 + 6x + 5 = (x + 1).(x + 5)$.

Repetimos este procedimento para $x^2 - 3x - 4 = (x + 1).(x - 4)$.

Desta forma, o limite dado, será igual a $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-4)}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+5}{x-4}$$

$$= \frac{-1+5}{-1-4}$$

$$= -\frac{4}{5}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4} = -\frac{4}{5}$.

Caro(a) acadêmico(a), na resolução do exemplo 2 necessitamos fatorar o polinômio. Foi mostrado o processo pelo método de Briot-Ruffini, mas existem outros modos de obter esta fatoração, por exemplo, a divisão por chaves. Se ainda tem dúvidas, não passe ao próximo exemplo. Sugiro que consulte algum livro do Ensino Médio que aborde o assunto polinômios para encontrar maiores detalhes do método.

Exemplo 3:

Calcular $\lim\limits_{x \to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$.

Resolução:

Para calcular este limite acontece a mesma situação do anterior, chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Vamos levantar esta indeterminação e, para isto, você usa o artifício algébrico do produto notável $a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$. Você multiplica o numerador da função, $\sqrt{x}-4$, pelo seu conjugado, $\sqrt{x}+4$, para eliminar a raiz quadrada do numerador. Para não alterar a função você multiplica também o denominador por $\sqrt{x}+4$.

Como $\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-4^2=x-16$, temos:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}{(x-16)\left(\sqrt{x}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16).\left(\sqrt{x}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{16}+4}$$

$$=\frac{1}{4+4} \longrightarrow =\frac{1}{8}$$

Portanto, $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{1}{8}$.

Caros acadêmicos, este limite resolvido acima pode ser resolvido de outra forma. Podemos fazer uma substituição do tipo $x = t^2$, $t > 0$, já que a expressão do numerador é formada por uma raiz quadrada. Então, fazendo a substituição da variável *x* por t^2 a função ficará assim, $\frac{\sqrt{t^2}-4}{t^2-16}$ que simplificando temos $\frac{t-4}{t^2-16}$. Observe que o valor que a variável tende também deve ser alterado, pois, quando $t^2 \longrightarrow 16$, então $x \longrightarrow 4$. Fique atento: esta substituição de variável não elimina a indeterminação, apenas faz com que a raiz saia e as expressões virem polinômios onde é possível a simplificação. Sugerimos que refaça o exemplo 3, utilizando esta substituição.

Exemplo 4:

Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Resolução:

Calculando este limite pela propriedade (e) chegaremos à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Desta vez, para "levantar" a indeterminação, faremos a substituição da variável *x* por t^3. Aí a função fica da seguinte forma, $\frac{\sqrt[3]{t^3}-1}{t^3-1}$ que, simplificando, fica $\frac{t-1}{t^3-1}$. Observe que, quando $t^3 \to 1$, então $t \to 1$. Assim,

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t-1}{t^3-1}$ este limite é novamente uma situação em que se fatora o numerador e o denominador.

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{(t-1).(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{1}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{1}{1+1+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Portanto, $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$.

Exemplo 5:

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Resolução:

Novamente tentamos calcular o limite pelo item (e) das propriedades de limites e chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Usaremos o artifício algébrico da racionalização do numerador da função para "**levantar**" a indeterminação, como foi feito no exemplo 3. Multiplica-se o numerador da função, $\sqrt{x+2}-\sqrt{2}$, pelo seu conjugado, $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$. Para não alterar a função, você multiplica também o denominador por $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$. Já sabemos que $a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$. Assim, $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = (x+2)-2 = x$. Conforme o que foi discutido acima, temos o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} . \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2 \quad \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2.2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3 LIMITES LATERAIS

Ao considerarmos o cálculo do $\lim_{x \to a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de *a*. Vimos no tópico anterior que para calcular o limite é preciso analisar o comportamento da função por valores menores do que *a* e por valores maiores do que *a*, isto é, nos valores de *x* pertencentes a um intervalo aberto contendo *a*, porém diferentes de *a*. Ainda, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que *a*.

Definição 1.2.1 Seja *f(x)* uma função definida em um intervalo aberto *(d, a)*. Dizemos que um número *L* é o *limite à esquerda* da função *f(x)*, quando *x* tende para *a* e indica-se por $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Perceba que no limite lateral à esquerda, temos $x \to a^-$. Este símbolo indica que devemos considerar apenas os valores de *x* menores do que *a*.

Definição 1.2.2 Seja *f(x)* uma função definida em um intervalo aberto *(a,c)*. Dizemos que um número *L* é o *limite à direita* da função *f(x)*, quando *x* tende para *a* e indica-se por $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Analogamente, no limite lateral à direita temos $x \to a^+$, onde este símbolo indica que devemos considerar apenas os valores de *x* maiores do que *a*.

Vamos ver agora alguns exemplos aplicando as definições acima:

Exemplo 1:

Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ se } x < 1 \\ 4, \text{ se } x = 1 \\ 4 - x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, determinar:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

c) Esboce o gráfico do *f*(*x*).

Resolução:

a) Pela Definição de limite à esquerda, responderemos este item. Observe que a função *f*(*x*) está definida por $f(x) = x^2 + 1$ se $x < 1$.

Logo, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$

Assim, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

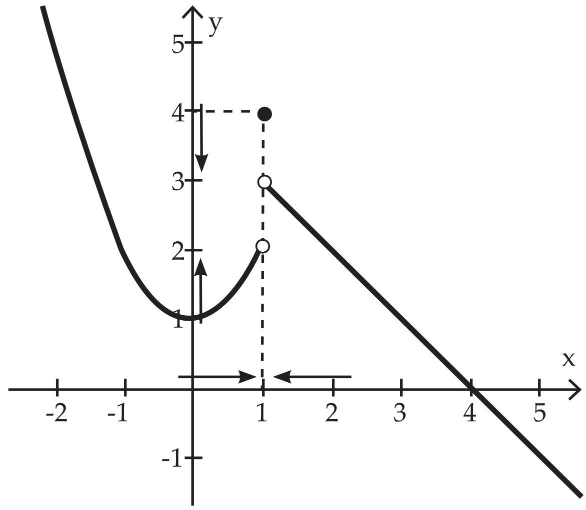
b) Agora, pela Definição de limite à direita responderemos este item. Observe que a função *f(x)* está definida por $f(x) = 4 - x$ se $x > 1$.

Logo, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = 4 - 1 = 3$

Assim, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

c) Vamos esboçar o gráfico de *f(x)* e sugerimos que verifique os limites laterais no gráfico.

FIGURA 8 – GRÁFICO 2.2



FONTE: O autor

As setas na figura 8 (gráfico 2.2), colocadas no eixo dos *x* próximos do 1, indicam a aproximação pela esquerda do 1 ($x \to 1^-$), isto é, por valores menores que 1, e a outra seta a aproximação pela direita do 1 ($x \to 1^+$), isto é, por valores maiores que 1.

Já as setas na figura 8 colocadas no eixo dos *y* indicam as tendências dos limites laterais.

Exemplo 2:

Considere a função $f(x) = -1 + \sqrt{x+2}$. Determinar, se possível, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. Esboçar o gráfico de *f*(*x*).

Resolução:

Não se pode examinar $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, pois a função *f*(*x*) só está definida para x + 2 ≥ 0, ou seja, x ≥ 2. Lembra do conceito de domínio de uma função estudado na disciplina de Introdução ao Cálculo? Se x < –2 então, x + 2 será um número negativo e $x \notin D(f)$. Assim, não existe $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$.

Já o $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ é possível calcular, basta aplicarmos as propriedades e podemos escrever

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(-1 + \sqrt{x+2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -2^+} (-1) + \lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}$$

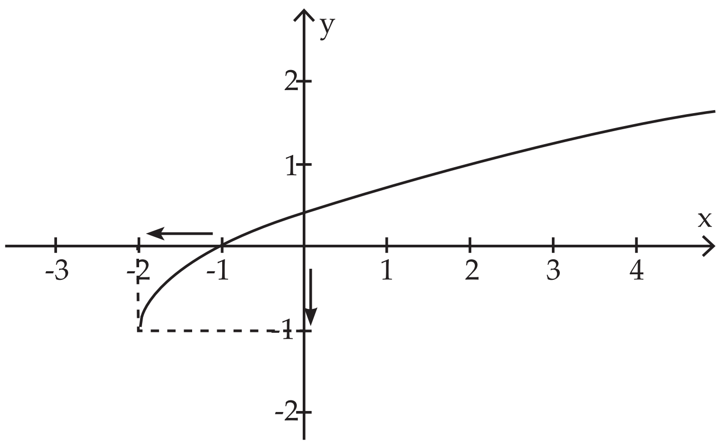
$$= -1 + \sqrt{\lim_{x \to -2^+} (x+2)}$$

$$= -1 + \sqrt{-2+2}$$

$$= -1 + 0 = -1$$

Portanto, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$

FIGURA 9 – GRÁFICO 2.3



FONTE: O autor

Observe na figura 9 (gráfico 2.3) a seta à direita do – 2 ($x \to -2^+$) no eixo dos x indicando os valores maiores que -2 e a s≤eta acima do -1 no eixo dos y indicando o valor do limite encontrado.

Exemplo 3:

Considere a função $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se} & x < 0 \\ 3, \text{ se} & 0 \leq x \leq 3 \\ x, \text{ se} & x > 3 \end{cases}$. Calcular:

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

Resolução:

a) Para $x < 0$ temos que $f(x) = -x$, assim, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$.

b) Para $x \geq 0$, $0 \leq x \leq 3$, temos $f(x) = 3$, assim, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3 = 3$.

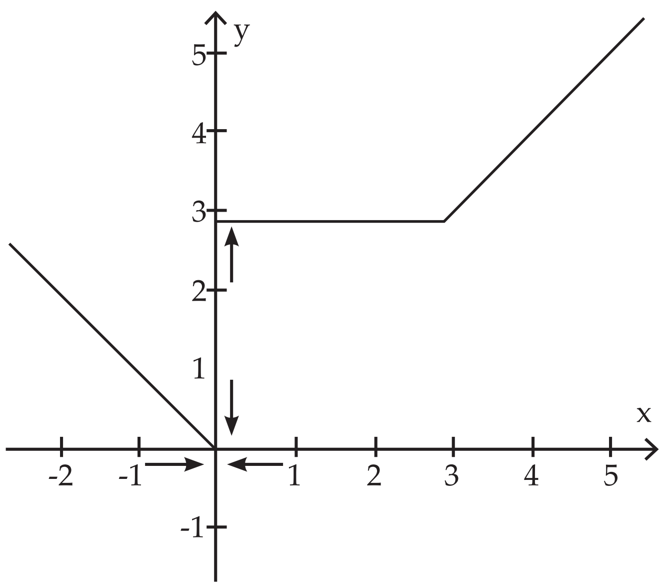
Logo, pelo Teorema 3.1, concluímos que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Para $x \leq 3$, ou seja, $0 \leq x \leq 3$, você tem $f(x) = 3$, assim, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 3 = 3$.

d) Para $x > 3$, temos que $f(x) = x$, assim, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x = 3$.

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$, concluímos, pelo Teorema 1.1.1, que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$.

FIGURA 10 – GRÁFICO 2.4



FONTE: O autor

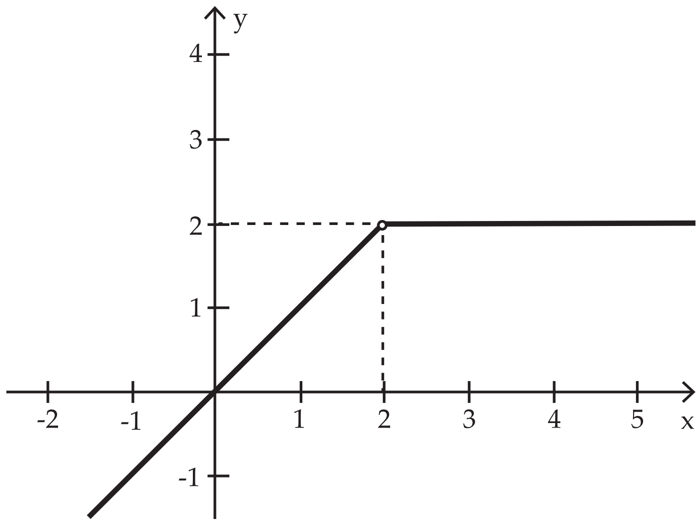
Teorema 1.2.1 Se f é definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Exemplo 4:

Dada a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x < 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ esboce o gráfico da função e analise os limites laterais $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Resolução:

FIGURA 11 – GRÁFICO 2.5



FONTE: O autor

Quando x tende a 2 para valores menores que 2, isto é pela esquerda, então $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$.

Quando x tende a 2 para valores maiores que 2, isto é pela direita, então $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$.

Neste caso, existe limite de $f(x)$ quando x tende a 2, mesmo que a função não esteja definida para $x = 2$.

Pelo Teorema 1.2.1, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$.

- Para que exista um limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, devem existir e ser iguais os limites laterais à esquerda e à direita, isto é: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
- Quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então este L é um número real. Portanto, quando dizemos que existe o limite, é porque existe um número real L tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.
- $\pm\infty$ não é um número real, é um símbolo. Portanto, quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, dizemos que não existe o limite. O símbolo $\pm\infty$ indica o que ocorre com f(x) quando x se aproxima cada vez mais de a.

Exemplo 5:

Seja $h(x)=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Determine $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$.

Resolução:

Em primeiro lugar, devemos escrever *h(x)* sem usar valor absoluto. Lembramos que $|x-2| = \begin{cases} -(x-2), & \text{se } x<2 \\ x-2, & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$, Definição de módulo.

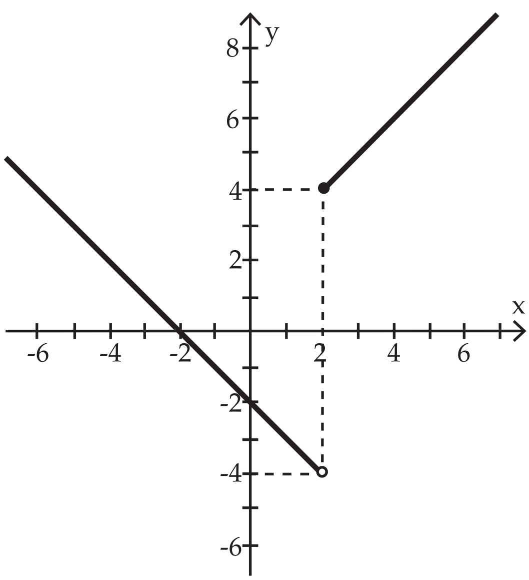
Logo, $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{-(x-2)}, & \text{se } x<2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$.

E como $x^2-4=(x-2)(x+2)$ temos enfim: $h(x)=\begin{cases} -x-2, & \text{se } x<2 \\ x+2, & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$

Agora é fácil: $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x-2)=-4$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=-4$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=4$.

FIGURA 12 – GRÁFICO 2.6



FONTE: O autor

Observação: Veja que, pelo Teorema 1.2.1, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, pois nos limites laterais calculados acima eles são diferentes.

Exemplo 6:

Seja $f(x)=\begin{cases} 3x^2-5, & \text{se} \quad x<1 \\ 4, & \text{se} \quad x=1 \\ x^3-3, & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$. Determine $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Resolução:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2-5\right)=-2$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3-3\right)=-2$;

Logo, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico você viu que:

- No cálculo de limites envolvendo indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, vimos que precisamos utilizar artifícios algébricos a fim de "levantar" a indeterminação.

- Lembre-se de que se *p(x)* é um polinômio e *p(a) = 0*, então significa que *x = a* é uma raiz do polinômio e pode-se escrever *p(x) = (x – a).q(x)*.

- No cálculo dos limites laterais podemos usar as propriedades dos limites ou então utilizar o gráfico para determinar o valor do limite.

- O símbolo $x \to a^-$ significa que *x* se aproxima de *a* por seu lado negativo, ou seja, com valores menores do que *a*.

- O símbolo $x \to a^+$ significa que *x* se aproxima de *a* por seu lado positivo, ou seja, com valores maiores do que *a*.

- Para que exista o limite $\lim_{x \to a} f(x)$, devem existir e serem iguais os limites laterais à esquerda e à direita, isto é: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios de 1 a 8, calcule os limites.

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+7x+6}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

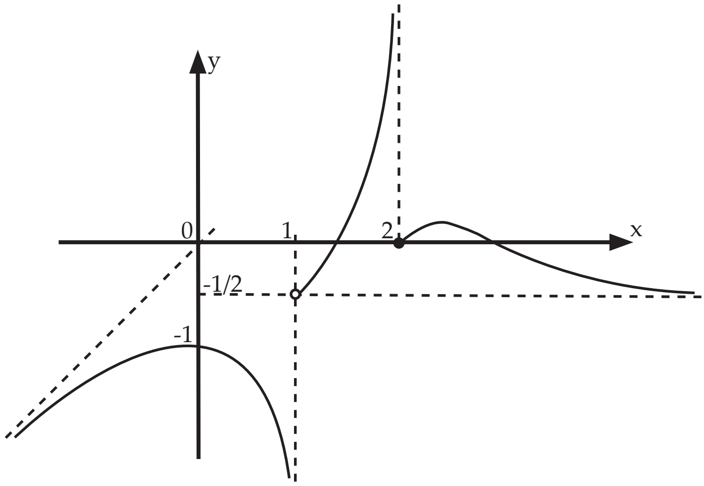
8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

9) Seja $f(x) = \begin{cases} 7x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2-2x+1, & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10) Seja $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x+5}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

11) Seja $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x^3+1}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

12) Na figura 2.7 está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Observando o gráfico, é possível estimar os seguintes limites:



a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

13) Seja $f(x)$ uma função definida para todo o número real por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{se } x \leq -2 \\ 4 - k, & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Determinar o valor da constante k para que exista $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

14) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{se } x > 4 \\ 4 - x, & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Assista ao vídeo de resolução da questão 5

Assista ao vídeo de resolução da questão 8

Assista ao vídeo de resolução da questão 9

Assista ao vídeo de resolução da questão 13

MAIS UM POUCO DE LIMITES

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior estudamos o comportamento de uma função f(x) quando x aproxima-se de um número real a. Vimos ainda como levantar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesta seção iremos analisar o comportamento de uma função f(x) quando x assume valores positivos arbitrariamente grandes (quando x tende para $+\infty$), ou valores negativos com valores absolutos arbitrariamente grandes (quando x tende para $-\infty$).

2 LIMITES NO INFINITO

Para início do nosso estudo, vamos analisar intuitivamente a função $f(x)=\frac{3x+1}{x+1}$, para $x \neq -1$.

Para valores de x, por exemplo, 0, 2, 5, 10, 100 e 1000 e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente, construímos o seguinte quadro para os correspondentes valores da função $f(x)$.

x	$f(x)=\frac{3x+1}{x+1}$
0	1
2	2,31
5	2,67
10	2,82
100	2,98
1000	2,998

Calcular:

À medida que x cresce através de valores positivos, observamos que os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Logo, pode-se dizer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$.

UNI

Em geral, o símbolo (infinito) ∞ não representa nenhum número real e não pode ser empregado na aritmética na maneira usual.

Definição 1.3.1 Seja *f(x)* uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$. O limite de *f(x)*, quando *x* cresce ilimitadamente, é *L*, e escreve-se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

ESTUDOS FUTUROS

Sugerimos que faça uma análise intuitiva da função acima $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$ de tal forma que x decresça ilimitadamente. E conclua o que acontece com $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Definição 1.3.2 Seja *f(x)* uma função definida em um intervalo $(-\infty, a)$. O limite de *f(x)*, quando *x* decresce ilimitadamente, é *L*, e escreve-se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $B > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.

UNI

As propriedades dos limites dadas no Tópico 1 permanecem válidas quando substituímos $x \to a$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

3 CÁLCULO DE LIMITES NO INFINITO

Teorema 1.3.1 Se *n* é um número natural positivo, então:

$$\text{i)}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Vamos agora aplicar o Teorema 1.3.1 na resolução de exemplos.

Exemplo 1:

Calcular o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x+5}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Resolução:

Se, no cálculo deste limite tentarmos utilizar o item (e) das propriedades dos limites, você chegará à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Para "**levantar**" esta indeterminação, vamos dividir o numerador e o denominador de *f(x)* por *x*, lembrando que *x* precisa ser considerado positivo. Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x+5}{\sqrt{4x^2-3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{7x+5}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{7x+5}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x^2-3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{7x}{x}+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(7+\dfrac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}\right)} \quad \text{Regra do quociente}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(7+\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(4-\dfrac{3}{x^2}\right)}} \quad \text{Regra da raiz}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 7 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}}}$$ Regra da soma

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 7 + 5.\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - 3.\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}}$$ Regra do produto por uma constante

Pelo Teorema 1.3.1, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Calculando o limite quando x $\to \infty$, a expressão do lado direito da igualdade acima, fica $\frac{7+5.0}{\sqrt{4-3.0}} = \frac{7}{2}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x+5}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{7}{2}$.

Exemplo 2:

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+8x-3}{9-x^3}$.

Resolução:

Aqui surge uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. A fim de usar o Teorema 1.3.1 vamos dividir o numerador e o denominador da fração por x^3. Isto é possível, para $x \neq 0$. Então,

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+8x-3}{9-x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{9}{x^3}-1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty} 1}$$ Propriedade dos limites

$$= \frac{0+0-0}{0-1} = 0$$ Teorema 1.3.1

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+8x-3}{9-x^3} = 0$

Exemplo 3:

Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2+7x}{3x^2+x-7}$.

Resolução:

Dividindo o numerador e o denominador por x^2, por ser a maior potência de x, e aplicando as propriedades de limites e o Teorema 1.3.1, obtemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+7x}{3x^2+x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{7}{x}}{3+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}5+7\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}3+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-7\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} \quad \text{Propriedade dos limites}$$

$$=\frac{5+0}{3+0-0}=\frac{5}{3} \quad \text{Teorema 1.3.1}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2+7x}{3x^2+x-7}=\frac{5}{3}$.

Exemplo 4:

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}+8x}{1-5x}$.

Resolução:

Neste caso, para que possamos usar o Teorema 3.1, dividimos os dois termos da fração por x. Como $x \to +\infty$, podemos supor $x > 0$ e, assim, $x=\sqrt{x^2}$. Lembremos que se a e b são positivos, então $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}+8x}{1-5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{x^2}}+\frac{8x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2-3}{x^2}}+8}{\frac{1}{x}-5}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}+8}{\frac{1}{x}-5}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4 - \dfrac{3}{x^2}} + 8}{\dfrac{1}{x} - 5}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - 0} + 8}{0 - 5}$$

$$= \frac{2 + 8}{-5} = -2$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3} + 8x}{1 - 5x} = -2$

Também é possível resolver este tipo de indeterminação, onde $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, supondo que x ≠ 0 nas divisões que faremos. Assim, dividimos o numerador e o denominador por *x* e depois aplicamos as propriedades de limites juntamente com o Teorema 1.3.1.

Exemplo 5:

Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + \sqrt{5 - 2x}}}{1 - 2x}$.

Resolução:

Faremos o mesmo procedimento que no exemplo anterior, só que desta vez x é negativo $(x \to -\infty)$ e assim, podemos supor $x < 0$, de modo que $x = -\sqrt{x^2}$. Logo,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + \sqrt{5 - 2x}}}{1 - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2 + \sqrt{5 - 2x}}}{x}}{\dfrac{1 - 2x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2 + \sqrt{5 - 2x}}}{-\sqrt{x^2}}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{\dfrac{9x^2}{x^2} + \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{x^2}}}{\dfrac{1}{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt{9 + \sqrt{\frac{5-2x}{x^4}}}}{\frac{1}{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt{9 + \sqrt{\frac{5}{x^4} - \frac{2x}{x^4}}}}{\frac{1}{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt{9 + \sqrt{\frac{5}{x^4} - \frac{2}{x^3}}}}{\frac{1}{x} - 2}$$

$$= -\frac{\sqrt{9 + \sqrt{0-0}}}{0-2} = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + \sqrt{5-2x}}}{1-2x} = -\frac{3}{2}$

Exemplo 6:

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - \sqrt{2x + 9x^4} \right)$.

Resolução:

Neste exemplo, nos deparamos com uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Vamos multiplicar e dividir a expressão $3x^2 - \sqrt{2x + 9x^4}$ por $3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}$ seguindo a racionalização pelo conjugado.

Então, para $x \neq 0$, temos:

$$3x^2 - \sqrt{2x + 9x^4} = \frac{\left(3x^2 - \sqrt{2x + 9x^4}\right)\left(3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}\right)}{3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}}$$

$$= \frac{9x^4 - \left(2x + 9x^4\right)}{3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}} = \frac{9x^4 - 2x - 9x^4}{3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}} = \frac{-2x}{3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}}$$

Assim $\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - \sqrt{2x + 9x^4} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{3x^2 + \sqrt{2x + 9x^4}}$

Observem que o limite continua indeterminado, porém a indeterminação é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aí, faremos do mesmo modo como acima: dividimos os termos da fração por x^2 e $x \to +\infty$, podemos supor x > 0 e, assim, $x^2 = \sqrt{x^4}$, chega-se a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{3x^2+\sqrt{2x+9x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2x}{x^2}}{\frac{3x^2+\sqrt{2x+9x^4}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{\sqrt{2x+9x^4}}{\sqrt{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{3+\sqrt{\frac{2x}{x^4}+\frac{9x^4}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{3+\sqrt{\frac{2}{x^3}+9}}$$

$$= \frac{-0}{3+\sqrt{0+9}} = 0$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2-\sqrt{2x+9x^4}\right)=0$

4 LIMITES INFINITOS

Vamos estudar limites infinitos, isto é, limites onde o *x* se aproxima de um número real *a* pela esquerda ou pela direita, e queremos saber o comportamento da função *f(x)* nestas condições.

Podemos ter o caso em que o limite da função não existe, pois seu valor não se aproxima de número algum. Assim, o limite poderá ser + ∞ ou – ∞: já sabemos que estes símbolos são usados para indicar o que acontece com os valores assumidos pela função. E ainda, podemos encontrar indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou ∞ – ∞.

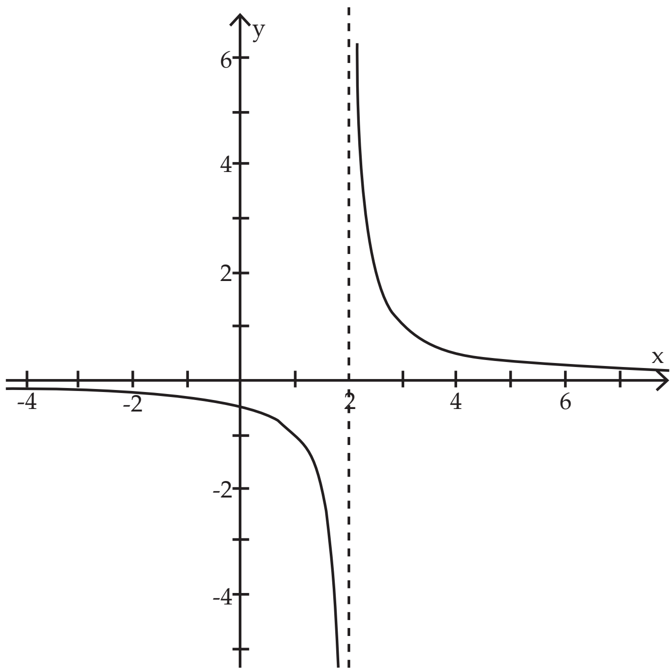
Iniciaremos este estudo, analisando intuitivamente a função $f(x)=\frac{1}{x-2}$, para x ≠ 2.

Tomando valores para *x*, por exemplo, 0, 2, 5, 10, 100 e 1000 e assim por diante, de tal forma que *x* cresce ilimitadamente, construímos o seguinte quadro para os correspondentes valores da função *f(x)*.

x	$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$
0	-0,5
1	-1
3	0,5
5	0,3
10	0,125
100	0,010
1000	0,0010

À medida que x cresce através de valores positivos, observamos que os valores da função *f(x)* se aproximam cada vez mais de 0. Logo, pode-se dizer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+8} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

FIGURA 13 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$



FONTE: O autor

Em geral, o símbolo ∞ (infinito) não representa nenhum número real e não pode ser empregado na aritmética na maneira usual.

Definição 1.3.2 Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto que contém o ponto a, exceto eventualmente em a. Dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, para todo $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Definição 1.3.3 Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto que contém o ponto a, exceto eventualmente em a. Dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, se para todo $B < 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Além dos limites definidos acima, podemos considerar ainda os limites laterais infinitos e os limites infinitos no infinito.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Teorema 1.3.2 Se n é um número natural, então:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$

Exemplo 1:

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x^6}$.

Resolução:

Ao limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x^6}$ aplicamos a propriedade de limites e obtemos $5 \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^6}$.

Assim, aplicamos o Teorema 1.3.2 item (i), no caso $n = 6$ e teremos $5 \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x^6} = +\infty$.

Exemplo 2:

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4}{x^5}$.

Resolução:

Ao limite $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4}{x^5}$ aplicamos a propriedade de limites e obtemos $4 \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^5}$.

Assim, aplicamos o Teorema 1.3.2 item (ii), no caso $n = 5$ (ímpar) e teremos

$$4 \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty .$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4}{x^5} = -\infty$.

Teorema 1.3.3 Seja *a* um número real qualquer e *f(x)*, *g(x)* funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = k$, sendo $k \neq 0$. Então,

a) Se $k > 0$ e $f(x) > 0$ para todo x próximo de a, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{0^+} = +\infty$

b) Se $k > 0$ e $f(x) < 0$ para todo x próximo de a, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{0^-} = -\infty$

c) Se $k < 0$ e $f(x) > 0$ para todo x próximo de a, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{0^+} = -\infty$

d) Se $k < 0$ e $f(x) < 0$ para todo x próximo de a, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{0^-} = +\infty$

Este Teorema nos permite calcular alguns limites infinitos. Destacamos que ele também é valido se substituirmos $x \to a$ por $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 3:

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(4x^3 + \dfrac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} \right)$.

Resolução:

Usando as propriedades de limites e o Teorema 1.3.2, teremos:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(4x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} \right) = \lim_{x \to 0^-} 4x^3 + \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^5} + \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^2} = 0 - \infty + 0 = -\infty$$

Portanto, $\lim_{x \to 0^-} \left(4x^3 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} \right) = -\infty$.

Exemplo 4:

Determine $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x^3}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x^3}$.

Resolução:

Para resolver este limite precisamos aplicar a Definição de módulo. Temos, então que $|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ -x, x \geq 0 \end{cases}$

Considerando $x < 0$, pela Definição de módulo temos $|x| = -x$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x^3} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^2}$$

$$= -\infty$$

Portanto $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x^3} = -\infty$

Considerando $x > 0$, pela Definição de módulo temos $|x| = x$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$$

$$= +\infty$$

Portanto $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x^3} = +\infty$

Exemplo 5:

Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{2x+5}{|x-3|}$.

Resolução:

Quando $x \to 3$, $|x - 3| \to 0^{+}$. Logo,

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+5}{|x-3|} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)}{\lim\limits_{x\to 3}|x-3|}$$
$$= \frac{11}{0^{+}}$$
$$= +\infty$$

Portanto $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+5}{|x-3|} = +\infty$

A função polinomial é definida por: $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m$ com $a_0 \neq 0$. Então $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_0x^m)$. Logo, o limite da função polinomial, quando $\xi \to \pm\infty$, é igual ao limite do seu termo de maior grau.

Vamos justificar a situação colocada no uni, no exemplo a seguir.

Exemplo 6:

Seja o limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3 + x^2 - x + 1)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^3\left(1 + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}} - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^2}} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^3}}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \quad \text{Teorema 1.3.1}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Exemplo 7:

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + x^2 + 2) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

Exemplo 8:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^3+5x^2+8\right)=\lim_{x\to -\infty} x^3=-\infty$$

Exemplo 9:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^4+x^3+x^2+2x+1\right)=\lim_{x\to -\infty} -2x^4=-\infty$$

Teorema 1.3.4 (Limite de função racional) Seja a função racional:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n}$$ com $a_0\neq 0$ e $b_0\neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}$$

O que o Teorema 1.3.4 nos diz é que um limite de uma função racional pode ser dado pelo limite da razão ou quociente dos termos de maior grau dos polinômios *p(x)* e *q(x)*.

Este Teorema vai facilitar o cálculo de limite de uma função racional quando a variável *x* tende para + ∞ ou tende para – ∞.

Exemplo 10:

Determinar $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5-4x^2+7x}{3x^2+5x-7}$.

Resolução:

Aplicando o Teorema 1.3.4 neste limite, temos

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5-4x^2+7x}{3x^2+5x-7}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3}{3}$$

Portanto, $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5-4x^2+7x}{3x^2+5x-7}=-\infty$

Exemplo 11:

Determinar $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{5x^3-3x^2-x}}{\sqrt{2x^4+x^2-4}}$.

Resolução:

Aplicando o Teorema 1.3.4 neste limite temos,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 3x^2 - x}}{\sqrt{2x^4 + x^2 - 4}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{5x^3}{2x^4}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{2x}}$$

$$= 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5x^3 - 3x^2 - x}}{\sqrt{2x^4 + x^2 - 4}} = 0$.

5 LIMITES FUNDAMENTAIS

Nesta seção apresentaremos três Teoremas chamados de limites fundamentais. Esta denominação se deve ao fato de que, através destes limites, podemos calcular outros limites.

Os limites fundamentais também são casos de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $1^{+\infty}$.

Teorema 1.3.5 O limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$ é conhecido como o limite trigonométrico fundamental.

Veja a demonstração deste Teorema no livro FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007, p. 121.

Exemplo 1:

Determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 7x}{x}$.

Resolução:

Para resolver este limite precisamos fazer uma mudança de variável a fim de podermos aplicar o Teorema 1.3.5.

Fazendo $u = 7x$, $u \to 0$ quando $x \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u/7} \quad \text{Mudança de variável}$$

$$= 7\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} \quad \text{Teorema 1.3.5}$$

$$= 7.1 = 7$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{x} = 7$

Exemplo 2:

Determine $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$.

Resolução:

Neste limite faremos primeiramente alguns artifícios de cálculo para, em seguida, utilizar o Teorema 4.4.1. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x.\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{5x.\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}} \quad \text{Artifício matemático}$$

$$= \frac{2}{5}.\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}} \quad \text{Teorema 4.4.1}$$

$$= \frac{2}{5}.\frac{1}{1} = \frac{2}{5}$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{2}{5}$

Exemplo 3:

Determine $\lim_{x\to 0}\frac{\sec x - 1}{x^2.\sec x}$.

Resolução:

Neste caso utilizaremos alguns artifícios de trigonometria para, em seguida, utilizar o Teorema 4.4.1. Assim,

$$\frac{\sec x - 1}{x^2.\sec x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} - 1}{x^2.\dfrac{1}{\cos x}} \quad \text{Definição de secante}$$

$$= \frac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{\dfrac{x^2}{\cos x}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$ Artifício matemático

$$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$ Relação fundamental da trigonometria

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

Voltando ao limite, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2.\sec x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right]$$ Teorema 4.4.1

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2.\sec x} = \frac{1}{2}$

Teorema 1.3.6 Segundo limite fundamental $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

O limite da função $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, de base positiva, quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to -\infty$, é o número irracional $e = 2,71828...$ (número de Euler), que é a base dos logaritmos naturais. Ou seja:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ e também } \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

A função definida por $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, possui domínio é dado por $1+\frac{1}{x}>0$, com $x \neq 0$, ou seja, x < -1 ou x > 0.

Relembrando: $1+\frac{1}{x}>0$ é igual a $\frac{x+1}{x}>0$.

1º caso: x + 1 > 0 e x > 0
x > -1 e x > 0, logo x > 0
2º caso:x + 1 < 0 e x < 0
x < -1 e x < 0, logo x < -1

Portanto, o domínio é a união do caso 1 com o caso 2, ou seja, $x \notin [-1,0]$.

Podemos concluir também que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. De fato, fazendo $x=\frac{1}{u}$, notamos que, $x \to 0$ quando $u \to \pm\infty$ e, assim, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$.

Exemplo 4:

Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Resolução:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$$

Exemplo 5:

Determine $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$.

Resolução:

Faremos a substituição $\frac{7}{x}=\frac{1}{u}$ ou $x = ku$. Então, $x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$ e temos:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x = \lim_{u\to-\infty}\left(1+\frac{7}{u}\right)^{7u}$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^7$$

$$= e^7$$

Portanto, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x = e^7$

Exemplo 6:

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{x}$.

Resolução:

Faremos a substituição $3x = u$. Então, $x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$ e temos,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{3}}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{x} = \sqrt[3]{e}$

Teorema 1.3.7 Terceiro limite fundamental: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Então, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$.

Demonstração:

Consideremos primeiramente a=1. Assim, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1^{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ e como In1 = 0 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln 1$

Suponhamos que $a > 0$ e $a \neq 1$. Fazendo $u = a^{x} - 1$, vamos isolar o x

$a^{x} - 1 = u \Rightarrow a^{x} = u + 1$ Definição de logaritmo neperiano
$\ln a^{x} = \ln(u + 1) \Rightarrow x.\ln a = \ln(u + 1)$ Propriedade de logaritmo

$$x = \frac{\ln(u+1)}{\ln a}.$$

Substituindo, temos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln a}}$$

$$=\lim_{u\to 0} u.\frac{\ln a}{\ln(u+1)}$$

$$=\ln a.\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}.\ln(u+1)}$$

$$=\ln a.\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{1/u}}$$

$$=\frac{\ln a}{\lim_{u\to 0}\ln(u+1)^{1/u}}$$

$$=\frac{\ln a}{\ln\left[\lim_{u\to 0}(u+1)^{1/u}\right]}$$

$$=\frac{\ln a}{\ln e}$$

$$=\frac{\ln a}{1}=\ln a$$

Concluímos que, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Caso particular do Teorema 1.3.7: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, pois $\ln e = 1$.

Exemplo 7:

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{3^{4x}-1}{4x}$.

Resolução:

Faremos uma substituição u = 4x. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4x}-1}{4x}=\lim_{u\to 0}\frac{3^u-1}{u}=\ln 3.$$

Exemplo 8:

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+5}-32}{x}$.

Resolução:

Este limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, então vamos "levantar" esta indeterminação.

Pelas propriedades de potência, temos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^{x+5} - 32}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x . 2^5 - 2^5}{x}$.

Colocaremos em evidência o fator 2^5. Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{x+5} - 32}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^5.\left(2^x - 1\right)}{x}$$

$$= 2^5. \lim_{x \to 0} \frac{\left(2^x - 1\right)}{x} \quad \text{Teorema 4.4.3}$$

$$= 2^5. \ln 2$$

$$= 32 \ln 2$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^{x+5} - 32}{x} = 32 \ln 2$

Exemplo 9:

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 6\sqrt{x}}$.

Resolução:

Podemos fatorar o denominador $x - 6\sqrt{x}$ como $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 6\right)$. Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 6\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 6\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} . \frac{1}{\sqrt{x} - 6} \qquad \text{Teorema 4.4.3}$$

$$= 1.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 6\sqrt{x}} = -\frac{1}{6}$

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico estudamos os limites no infinito, limites infinitos e os limites fundamentais.

Nos limites no infinito é importante destacar:

- O Teorema 1.3.2 que diz que o $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, para n um número natural qualquer.

- Vimos como levantar indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ utilizando algum artifício algébrico.

- Já nos limites infinitos, vimos o comportamento destes limites de forma intuitiva e também pelos gráficos.

- Teorema 1.3.1 Se n é um número natural, então:

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{Se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{Se } n \text{ é impar} \end{cases}$

- O Teorema 1.3.3 e outros limites importantes podem ser revistos no quadro a seguir:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x)$	$\lim h(x)$	Simbolicamente
$k > 0$	0^+	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$\frac{k}{0^+} = +\infty$
$\mid k > 0$	0^-	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$\frac{k}{0^-} = -\infty$
$k < 0$	0^+	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$\frac{k}{0^+} = -\infty$
$k < 0$	0^-	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$\frac{k}{0^-} = +\infty$
k	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	0	$\frac{k}{\pm\infty} = 0$
$+\infty$	0^+	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$
$+\infty$	0^-	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

- Teorema 1.3.4 (Limite de função racional) Seja a função racional

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n}$$ com $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}.$$

Também estudamos os limites fundamentais, que foram três.

- Teorema 1.3.5 Limite trigonométrico fundamental $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}=1$.
- Teorema 1.3.6 Segundo limite fundamental $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.
- Teorema 1.3.7 Terceiro limite fundamental: Seja $a>0$ e $a\neq 1$. Então, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios 1 a 20, calcule os limites.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-7}{2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4-3x^2+1}{2x^2+5x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-7}{2x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3-5x^2+x}{x^4+7x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^{3x}-1}{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{\sqrt{9x^2+5x+4}}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3x-1}{5x^3-\sqrt[3]{x^3+1}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{x+3}-125}{x}$

Assista ao vídeo de resolução da questão 6

Assista ao vídeo de resolução da questão 11

13) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 7}{6x^5 + 2x^4 - x^3 + 2}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{x-1} - \frac{1}{7}}{x}$

15) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$

16) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x+1}\right)^{x}$

17) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x + 1}$

18) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x + 1}$

19) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{e^x - e^8}{x - 8}$

20) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x.\text{cossec}\, x.\sec x\right)$

Assista ao vídeo de resolução da questão 14

CONTINUIDADE

1 INTRODUÇÃO

No Tópico 2 nesta unidade nos deparamos com cálculos de limites onde o limite não existia. Isto é, os limites laterais eram diferentes. Então, aqui iremos estudar estas situações e outras que envolvem a continuidade ou a descontinuidade de funções.

Intuitivamente, gostaríamos de dizer que uma função definida num intervalo é contínua quando seu gráfico é constituído por um traço, isto é, quando seu gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel. Essa ideia intuitiva, apesar de não ser precisa, poderá ser útil em muitas situações. Também veremos um Teorema fundamental para o Cálculo, o Teorema do Valor Intermediário.

2 DEFINIÇÃO DE CONTINUIDADE

Definição 1.4.1 Uma função $f(x)$ é contínua no ponto x = a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ está definida no ponto x = a;

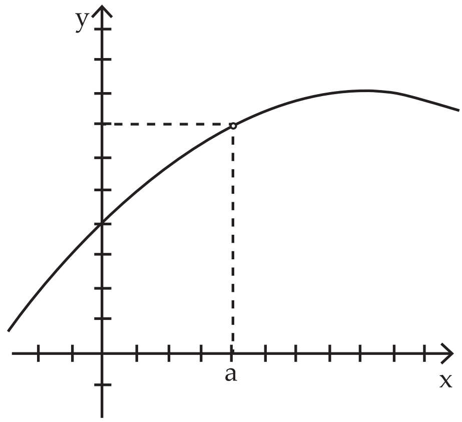
(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Quando uma ou mais destas condições não é satisfeita, dizemos que a função é descontínua em x = a.

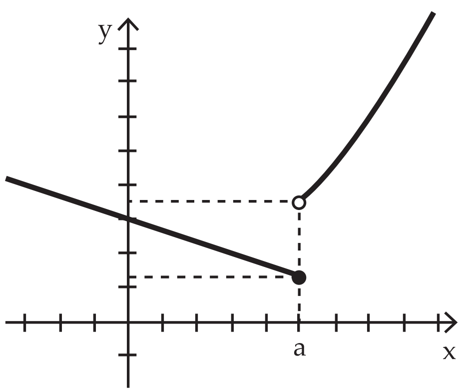
Observe os gráficos nas figuras a seguir, que mostram situações de funções que não são contínuas em x = a.

FIGURA 14 – GRÁFICO 4.1



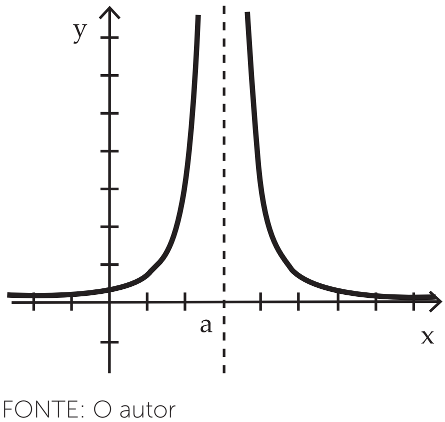
FONTE: O autor

FIGURA 15 – GRÁFICO 4.2



FONTE: O autor

FIGURA 16 – GRÁFICO 4.3



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Analise a continuidade da função $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{se } x<-1 \\ -x, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ no ponto x = -1.

Resolução:

Precisamos verificar se a função satisfaz as três condições da Definição 4.4.1.

(i) f(-1) = - (-1) = 1, ou seja, em x = -1 a função tem imagem.

(ii) Para tratar a existência do limite no ponto, precisamos calcular os limites laterais.

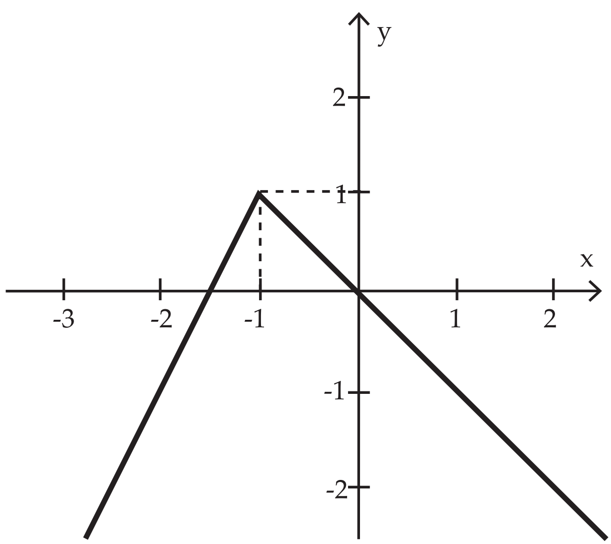
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x+3) = 1 \text{ e } \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x) = 1$$

Logo, $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$.

(iii) Esta condição é apenas para comparar se os valores no item *(i)* e *(ii)* são iguais. O que comprovamos $f(-1) = 1 = \lim_{x\to -1} f(x)$.

Portanto, a função *f(x)* é contínua em x = -1.

FIGURA 17 – MOSTRA A CONTINUIDADE DE *F(X)* EM *X* = -1



FONTE: O autor

Exemplo 2:

Analise a continuidade da função $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & \text{se } x<4 \\ x^2-4x+3, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$ no ponto x = 4.

Resolução:

Novamente, temos que verificar se a função satisfaz as três condições da Definição 4.4.1.

(i) $f(4) = 4^2 - 4.4 + 3 = 3$, condição satisfeita.

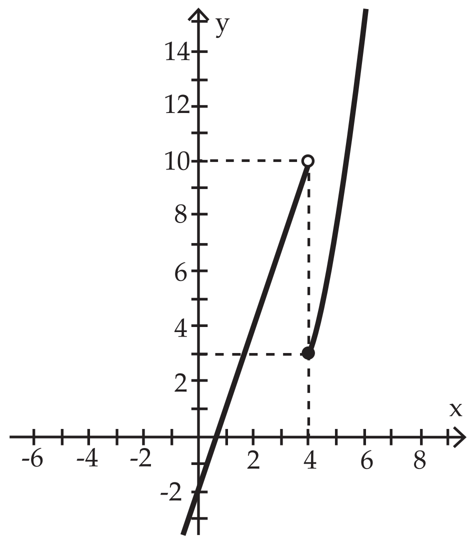
(ii) Verificaremos a existência do limite no ponto para isto, vamos calcular os limites laterais.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x - 2) = 10 \text{ e } \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (x^2 - 4x + 3) = 3$$

Logo, $\lim_{x \to 4} f(x) = \nexists$, pois os limites laterais são diferentes.

Assim, como o item (ii) não foi satisfeito, podemos concluir que a função *f(x)* é descontínua em $x = 4$, conforme pode ser constato na figura a seguir.

FIGURA 18 – MOSTRA A DESCONTINUIDADE DE *f(x)* em *x* = 4



FONTE: O autor

Exemplo 3:

Verificar a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}, & \text{se } x < -1 \\ 1, & \text{se } x = -1 \\ 3x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$ no ponto $x = -1$.

Resolução:

Precisamos verificar se a função satisfaz as três condições da Definição 4.4.1.

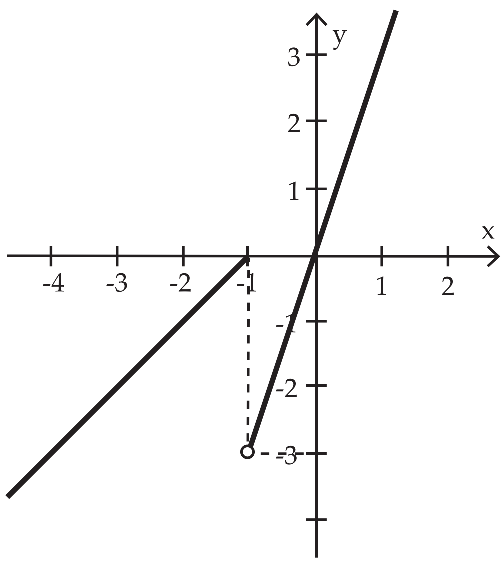
(i) f(-1) = 1: condição satisfeita.

(ii) Calculemos os limites laterais.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 3x = -3$ e $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} = \dfrac{0}{0}$, que é uma indeterminação. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0$

Assim, os limites laterais são diferentes e concluímos que a função é descontínua em x = -1.

FIGURA 19 – FUNÇÃO DESCONTÍNUA EM x = -1



FONTE: O autor

Teorema 1.4.1 Se as funções *f(x)* e *g(x)* forem contínuas no ponto x = a, então:

(i) $f + g$ é contínua em x = a;
(ii) $f - g$ é contínua em x = a;
(iii) $f \,.\, g$ é contínua em x = a;
(iv) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em x = a se g(a) ≠ 0 e tem uma descontinuidade em x = a se g(a) = 0;

Exemplo 4:

Analisar a continuidade da função dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se} \quad x \neq 2\\ 4, & \text{se} \quad x=2\end{cases}$ em x = 2.

Resolução:

Precisamos verificar se a função satisfaz as três condições da Definição 1.4.1.

(i) f(2) = 4: condição satisfeita.

(ii) Calculemos os limites laterais.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0}$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0}$, que é uma indeterminação. Por outro lado,

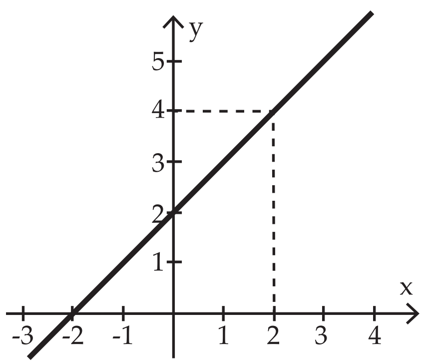
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4\\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4\end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

(iii) Neste item temos, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Portanto, a função é contínua no ponto x = 2.

FIGURA 20 – FUNÇÃO CONTÍNUA EM x = 2



FONTE: O autor

Exemplo 5:

Analisar a continuidade da função dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{|2x|}, & \text{se } x\neq 0\\ 3, & \text{se } x=0\end{cases}$ em x = 0.

Resolução:

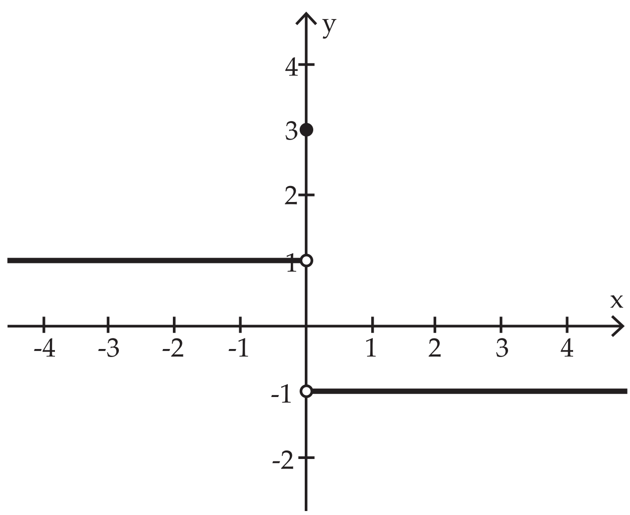
(i)) f(0) = 3: condição satisfeita.

(ii) Para calcular os limites laterais, vamos primeiro aplicar a Definição de módulo.

Recordando, $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. Assim, se x>0, então $f(x)=\dfrac{2x}{2x}=1$, e se x<0, então $f(x)=\dfrac{2x}{-2x}=-1$. Agora, analisando os limites laterais, temos, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -1=-1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$.

Portanto, a função não é contínua em x = 0, pois não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Observe que o limite não existe, porque os limites laterais são diferentes.

FIGURA 21 – FUNÇÃO DESCONTÍNUA EM x = 0



FONTE: O autor

3 CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

Teorema 1.4.2 Sejam *I* um intervalo aberto, $c \in I$ e *f(x)* uma função com $I \subset D(f)$. Então *f(x)* é contínua em *c*, se, e somente se, for contínua à direita e à esquerda no ponto *c*.

Definição 1.4.2 Quando uma função *f(x)* é contínua em todo ponto $a \in D(f)$, diremos, simplesmente, que *f(x)* é contínua. Caso contrário, diremos que *f(x)* é descontínua.

Definição 1.4.3 Uma função *f(x)* é dita contínua em um intervalo fechado [a,b] se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) *f(x)* é contínua em (a,b).
(ii) *f(x)* é contínua à direita em x = a.
(iii) *f(x)* é contínua à esquerda em x = b.

Exemplo 1:

Analisar a continuidade da função dada por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$.

Resolução:

Como o domínio da função é dado pelo intervalo fechado [-7,7], então precisamos analisar a continuidade de *f(x)* no intervalo aberto (-7,7) (Teorema 4.2.1) e nos dois extremos, conforme Definição 4.2.2.

(i) Seja $c \in (-7,7)$.

Então existe $f(c)$, $\forall\ c \in (-7,7)$ e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \sqrt{49 - x^2} = \sqrt{49 - c^2} = f(c)$. Assim, *f(x)* é contínua em cada ponto do intervalo (-7,7).

(ii) Para analisar a continuidade à direita em x = -7, calculamos:

$$\lim_{x \to -7^+} f(x) = \lim_{x \to -7^+} \sqrt{49 - x^2} = 0 = f(-7).$$

(iii) Analisando a continuidade à esquerda em x = 7, calculamos:

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} \sqrt{49 - x^2} = 0 = f(7).$$

Portanto, a função é contínua no intervalo fechado [-7,7].

4 CONTINUIDADE DOS POLINÔNIOS E DAS FUNÇÕES RACIONAIS

Teorema 1.4.3

(i) Uma função polinomial é contínua para todo número real.
(ii) Uma função racional é contínua em todos os pontos do seu domínio e tem descontinuidade nos pontos em que o denominador é zero.

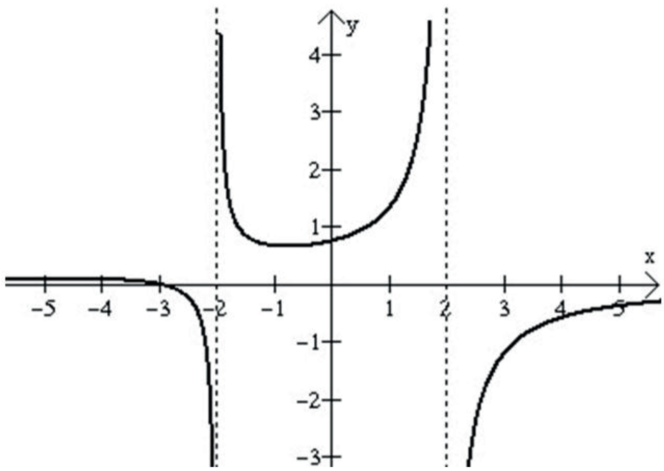
Exemplo 1:

Para quais valores de x há um buraco ou uma interrupção no gráfico da função $f(x) = \dfrac{x+3}{4-x^2}$?

Resolução:

A função $f(x) = \dfrac{x+3}{4-x^2}$ é racional e pelo Teorema 4.3.1 ela é contínua em todo seu domínio, exceto nos pontos em que o denominador é zero. Assim, $4 - x^2 = 0$ obtêm-se dois pontos de descontinuidade, x = -2 e x = 2.

FIGURA 22 – FUNÇÃO DESCONTÍNUA EM x = -2 e x = 2.

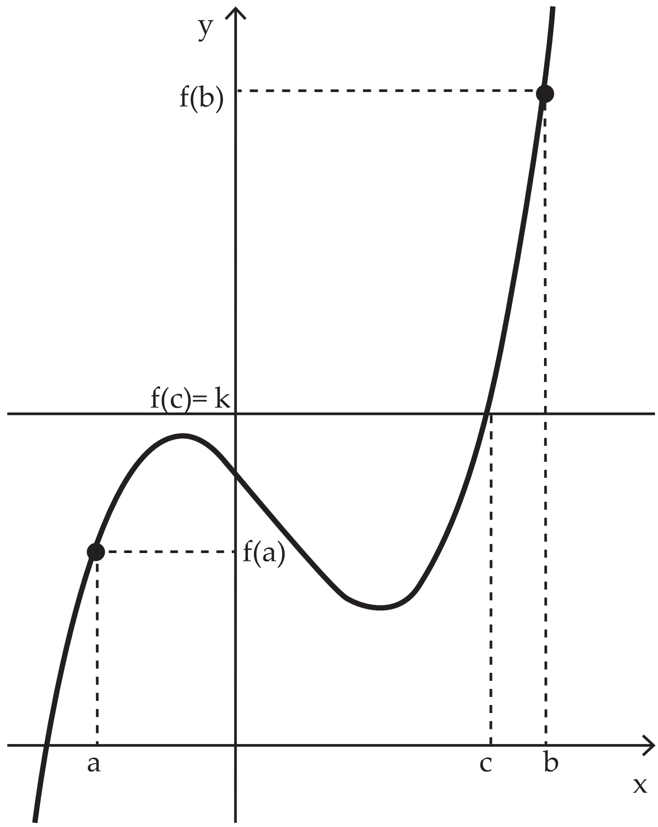


FONTE: O autor

5 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Teorema 1.4.4 (Teorema do Valor Intermediário – TVI) Se *f(x)* é uma função contínua em um intervalo fechado *[a,b]* e *k* é um número qualquer tal que $f(a) \leq k \leq f(b)$, então existe no mínimo um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

FIGURA 23 – GRÁFICO 4.10

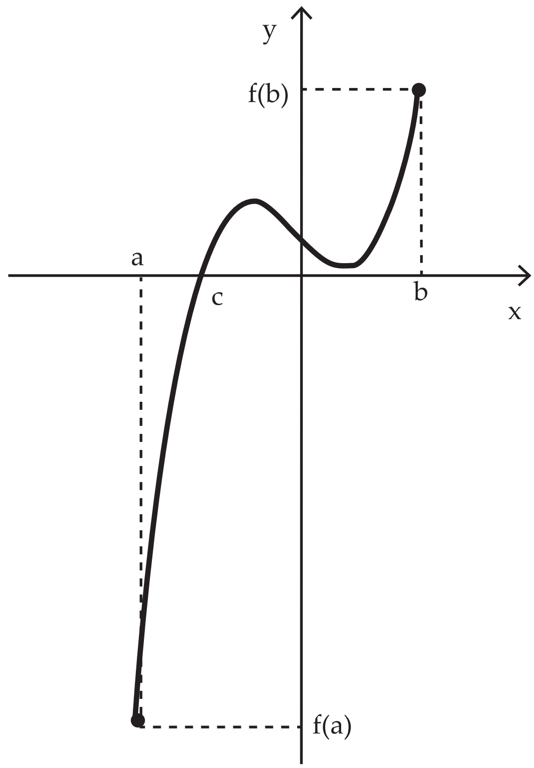


FONTE: O Autor

Geometricamente, o Teorema do Valor Intermediário diz que qualquer reta horizontal y = k interceptando o eixo y entre os números f(a) e f(b) interceptará a curva y = f(x) pelo menos uma vez no intervalo [a,b].

Observem uma consequência do Teorema 1.4.4: se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$. Vejam esta situação representada nas figuras a seguir.

FIGURA 24 – GRÁFICO 4.11



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Verifique que a função $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5x - 3$ tem pelo menos uma raiz real no intervalo (0,1).

Resolução:

A função $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5x - 3$ é contínua em $[0,1]$, conforme o Teorema 1.4.3.

Calculando os extremos do intervalo, temos $f(0) = -3$ e $f(1) = 6$ então, como consequência do Teorema 1.4.4 (TVI) existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Portanto, mostramos que $f(x)$ possui uma raiz real no intervalo (0,1).

Exemplo 2:

Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função $f(x) = x^4 + x - 3$ possui uma raiz no intervalo (1,2).

Resolução:

A função $f(x) = x^4 + x - 3$ é contínua em [1,2], conforme o Teorema 1.4.3. Calculamos a função nos extremos do intervalo, temos $f(1) = -1$ e $f(2) = 15$.

Assim, $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$ e conforme o Teorema 1.4.4 (TVI) existe $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$.

Ou seja, a equação $x^4 + x - 3$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo (1,2).

Portanto, mostramos que $f(x)$ possui uma raiz real no intervalo (1,2).

LEITURA COMPLEMENTAR

2.9.1 TEOREMA

Se a for qualquer número exceto 0 e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ então f será contínua em a.

Prova

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais, exceto 0. Logo, a está nesse domínio. A prova estará completa se pudermos mostrar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$. Para provar isso, dois casos devem ser considerados: $a > 0$ e $a < 0$. Provaremos o caso em que $a > 0$ e deixaremos a demonstração do caso $a < 0$ como exercício (veja Exercício 18).

Como $\dfrac{1}{x}$ está definido para todo x exceto 0, o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1 pode ser qualquer intervalo aberto contendo a, mas não contendo 0.

Considerando $a > 0$, precisamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \varepsilon$. (6)

$$\text{Como } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x}{ax}\right|$$

$$= \frac{|x - a|}{|a|.|x|}$$

$$= |x - a|.\frac{1}{a|x|} \qquad \text{(pois a > 0)}$$

A afirmativa (6) é equivalente a

se $0 < |x-a| < \delta$ então $|x-a|.\dfrac{1}{a|x|} < \varepsilon$. (7)

Na parte final de (7), além de $|x-a|$, temos outro fator: o quociente $\dfrac{1}{a|x|}$.

Logo, para provar (7) precisamos restringir δ para obtermos uma desigualdade envolvendo $\dfrac{1}{a|x|}$. Escolhendo o intervalo aberto exigido pela Definição 2.1.1 como sendo $\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{3}{2}a\right)$, que contém *a*, mas não 0, estamos exigindo $\delta \leq \dfrac{1}{2}a$. Então,

$$0 < |x-a| < \delta \text{ e } \delta \leq \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow |x-a| < \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a < x-a < \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a < x < \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a < |x| < \frac{3}{2}a \qquad \text{(pois a > 0)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3a} < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3a^2} < \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2} \qquad (8)$$

Agora

$$0 < |x-a| < \delta \text{ e } \frac{1}{a|x|} \leq \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow |x-a|.\frac{1}{a|x|} < \delta.\frac{2}{a^2} \qquad (9)$$

Como nossa meta é ter $\Rightarrow |x-a|.\dfrac{1}{a|x|} < \varepsilon$, a afirmativa (9) indica que devemos exigir $\delta.\dfrac{2}{a^2} \leq \varepsilon$, isto é, $\delta \leq \dfrac{1}{2}a^2\varepsilon$. Assim, com essas duas restrições em δ, escolhemos $\delta = \min\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{1}{2}a^2\varepsilon\right)$. Com esse δ usamos o seguinte argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a|.\frac{1}{a|x|} < \delta.\frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x - a|}{|a||x|} < \delta.\frac{1}{a|x|} \quad \text{(pois a > 0)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a - x}{ax}\right| < \delta.\frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta.\frac{1}{a|x|} \qquad (10)$$

Mostramos em (8) se $\delta \leq \frac{1}{2}a$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $\frac{1}{a|x|} \leq \frac{2}{a^2}$ isto é, $\delta.\frac{1}{a|x|} \leq \delta.\frac{2}{a^2}$. Continuando a partir de (10), temos:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta.\frac{1}{a|x|} \quad \text{e} \quad \delta.\frac{1}{a|x|} \leq \delta.\frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta.\frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \frac{1}{2}a^2\varepsilon.\frac{2}{a^2} \quad \left(\text{pois } \delta \leq \frac{1}{2}a^2\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

Assim, mostramos que para todos $\varepsilon > 0$, com $\delta = \min\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a^2\varepsilon\right)$, a seguinte afirmativa será verdadeira:

se $0 < |x - a| < \delta$ então $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$.

Isso prova que $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, se $a > 0$. Logo, f é contínua em a, se $a > 0$.

FONTE: LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. p. 123-125. v. 1.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico você viu que:

- Uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ está definida no ponto x = a;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Se a função não satisfizer uma das condições acima, será dita uma função descontínua em $x = a$.

- Também vimos que uma função pode ser contínua em um intervalo.

- Uma função polinomial é contínua para todo número real.

- Uma função racional é contínua em todos os pontos do seu domínio e tem descontinuidade nos pontos em que o denominador é zero.

- Teorema do Valor Intermediário: Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e k é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então existe no mínimo um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios de 1 a 6, verifique se cada função a seguir é contínua nos pontos indicados, e esboce os gráficos:

1) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 4, & x>1 \end{cases}$ em x = 1

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \le 3 \\ 2x+4, & x>3 \end{cases}$ em x = 3

3) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x<0 \\ x-1, & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$ em x = 0

4) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x<-1 \\ x^2-3, & x \ge -1 \end{cases}$ em x = -1

5) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{se } x<1 \\ 1, & \text{se } x<1 \\ 1-x, & \text{se } x>1 \end{cases}$ em x = 1

6) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x \ne 2 \\ 5, & \text{se } x=2 \end{cases}$ em x = 2

Nos exercícios de 7 a 9 determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

7) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$

8) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-21}$

9) $f(x)=3x^4+5x^3-x+6$

10) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $(-1,3)$.

11) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ possui três raízes reais distintas no intervalo $(-1,7)$.

Assista ao vídeo de resolução da questão 2

UNIDADE 2

DERIVADA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- entender e compreender o conceito de derivada de uma função e seu significado geométrico;
- calcular a derivada de funções elementares;
- calcular a derivada de funções composta, através da regra da cadeia;
- determinar a taxa de variação de uma função;
- encontrar os pontos extremos de uma função;
- resolver problemas que envolvem derivada.

PLANO DE ESTUDOS

Iniciamos a unidade apresentando vários conceitos dos elementos que envolvem as equações diferenciais. É preciso se apropriar da terminologia e das notações. A partir daí, estudaremos as equações diferenciais lineares de primeira ordem e também de segunda ordem.

TÓPICO 1 – DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

TÓPICO 2 – DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

TÓPICO 3 – DERIVADA DE FUNÇÕES IMPLÍCITAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

TÓPICO 4 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES I

TÓPICO 5 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES II

TÓPICO 6 – APLICAÇÕES DA DERIVADA

Assista ao vídeo desta unidade.

UNIDADE 2

TÓPICO 1

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção vamos estudar o conceito de uma derivada, que é a principal ferramenta matemática utilizada para calcular as taxas de variação e compreender o significado geométrico da derivada.

2 CONCEITO DE DERIVADA

Definição 2.1.1 A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação à variável x é uma função denotada por $f'(x)$ cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

desde que esse limite exista.

A notação de Leibniz, empregada para derivada de uma função $f(x)$, também pode ser indicada por $\frac{d}{dx}f(x)$ ou $\frac{df}{d(x)}$.

Caro(a) acadêmico(a), o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática, principalmente para o cálculo. Sugiro que pesquise a biografia de Leibniz.

Exemplo 1:

Calcule a derivada de *f(x)* para f(x) = 5x² - 7.

Resolução:

Se x for qualquer número do domínio de *f(x)*, então da Definição 2.1.1, temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[5(x+\Delta x)^2 - 7\right] - \left(5x^2 - 7\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 7 - 5x^2 + 7}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(10x + 5\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (10x + 5\Delta x) \\
&= 10x
\end{aligned}
$$

Portanto, a derivada de uma função *f(x)* é dada por *f '(x) = 10x*.

Apresentamos agora um esquema para facilitar o cálculo da derivada, Simmons (2005, p. 80) através da definição.

O processo de calcular realmente a derivada *f'(x)* chama-se *derivação* (ou *diferenciação)* da função dada *f(x).* Esta é a operação fundamental do Cálculo, da qual tudo o mais depende. Em princípio seguiremos simplesmente as instruções computacionais especificadas em (1). Essas instruções podem ser arranjadas num procedimento sistemático denominado *regra dos três passos* (ou *etapas).*

> **Passo 1:** Escreva a diferença $f(x + \Delta x) - f(x)$ para a particular função em consideração e, se possível, simplifique-a até o ponto em que Δx seja um fator.
>
> **Passo 2:** Divida por Δx para formar o *quociente das diferenças* $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,e manipule-o de modo a preparar o caminho para o cálculo de seu limite quando $\Delta x \to 0$. Na maioria dos exemplos e problemas deste capítulo, essa manipulação envolve nada mais que cancelar Δx do numerador e do denominador.

Passo 3: Calcule o limite do quociente das diferenças quando $\Delta x \to 0$. Se o Passo 2 atingiu seu propósito, só uma simples inspeção é necessária aqui.

Exemplo 2:

Dada a função $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$, calcule *f´(x)*.

Resolução:

Se *x* for um número qualquer do domínio de *f(x)*, ou seja, for tal que $x \neq 4$, então da Definição 2.1.1, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2(x+\Delta x)+3}{x+\Delta x-4} - \dfrac{2x+3}{x-4}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(2x+2\Delta x+3)(x-4)-(2x+3)(x+\Delta x-4)}{(x+\Delta x-4)(x-4)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2x^2+2x\Delta x+3x-8x-8\Delta x-12-2x^2-2x\Delta x+8x-3x-3\Delta x+12}{(x+\Delta x-4)(x-4)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-11\Delta x}{(x+\Delta x-4)(x-4)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-11\Delta x}{(x+\Delta x-4)(x-4)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-11}{(x+\Delta x-4)(x-4)}$$

$$= \frac{-11}{(x-4)(x-4)}$$

$$= \frac{-11}{(x-4)^2}$$

Portanto, $f'(x) = \dfrac{-11}{(x-4)^2}$.

A partir da derivada da função *y = f(x)*, podemos definir a derivada de uma função no ponto x_0. Para isto, basta substituir *x* por x_0 na Definição 2.1.1.

Definição 2.1.2 Dizemos que uma função *y = f(x)* é diferenciável ou derivável em x_0 se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Também é possível representar $f'(x_0)$ por $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Exemplo 3:

Calcule a derivada da função $f(x) = 2x^3 - 5$ no ponto $x_0 = 3$.

Resolução:

Se $f(x) = 2x^3 - 5$, então $f(x) = 2 \cdot 3^3 - 5 = 49$.

Assim, utilizando a Definição 1.1.2, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(3 + \Delta x)^3 - 5 - 49}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left[27 + 27\Delta x + 9(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right] - 54}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{54 + 54\Delta x + 18(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 54}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(54 + 18\Delta x + 2(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 54 + 18\Delta x + 2(\Delta x)^2$$

$$= 54$$

Logo, a função $f(x) = 2x^3 - 5$ é derivável no ponto $x_0 = 3$, sendo $f'(3) = 54$.

Exemplo 4:

Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 1$.

Resolução:

Se $f(x) = \sqrt{x}$, calculamos $f(1) = \sqrt{1} = 1$.

Agora, utilizando a Definição 1.1.2, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad \text{Indeterminação}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \qquad \text{Usamos o artifício algébrico } a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

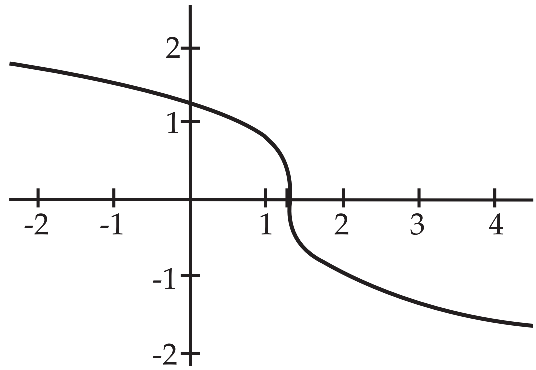
Portanto, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Teorema 2.1.1 Se uma função *f(x)* é derivável num ponto x_0 do seu domínio, então *f(x)* é contínua em x_0, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A partir do Teorema 2.1.1, verificamos que se uma função é descontínua em um ponto, nesse ponto ela não é derivável. Portanto, a continuidade da função num determinado ponto é condição necessária para que ela seja derivável nesse ponto. Porém, esta não é uma condição suficiente: uma função pode ser contínua sem ser derivável num ponto.

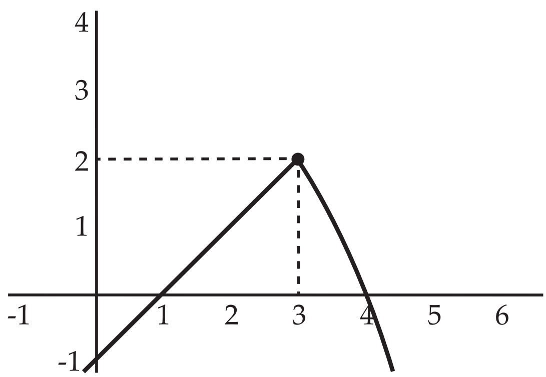
Para ilustrar sobre o que foi comentado no ícone acima, vamos ver através dos dois gráficos a seguir (Figura 25a e Figura 25b) que mostram duas situações comuns nas quais uma função que é contínua em x_0 pode deixar de ser derivável em x_0.

FIGURA 25a – GRÁFICO 11a



FONTE: O autor

FIGURA 25b – GRÁFICO 11b



FONTE: O autor

3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

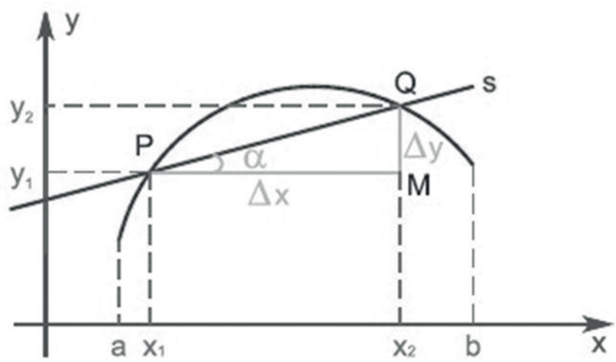
Veremos que derivada de uma função num dado ponto, quando existe, tem um significado geométrico importante.

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), na figura a seguir. Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva. Seja $\boldsymbol{s}$ a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na figura a seguir, temos que a inclinação da reta $\boldsymbol{s}$ (ou coeficiente angular de s) é:

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

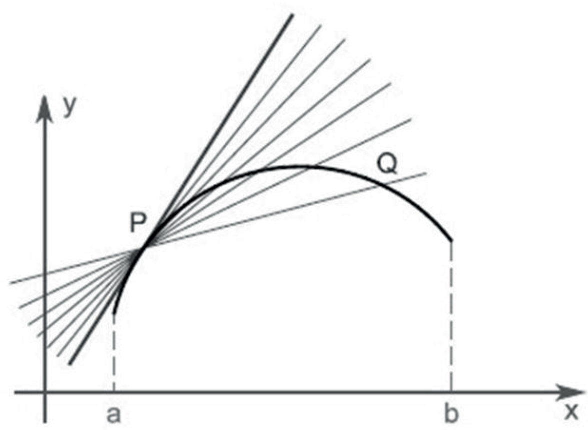
FIGURA 26 – A INCLINAÇÃO DA RETA *S* (OU COEFICIENTE ANGULAR DE S) É: $tg\ \alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



FONTE: O autor

Suponhamos agora que, mantendo *P* fixo, *Q* se mova sobre a curva em direção a *P*. Diante disto, a inclinação da reta secante ***s*** variará. À medida que *Q* vai se aproximando cada vez mais de *P*, a inclinação da secante ***s*** varia cada vez menos, tendendo para o valor limite constante, como mostra a figura a seguir. Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto *P*.

FIGURA 27 – INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE À CURVA NO PONTO *P*



FONTE: O autor

Definição 2.1.3 Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre esta curva, a inclinação da reta tangente à curva no ponto *P* é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, podemos reescrever o limite acima na forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Com isso, podemos concluir que a derivada de uma função *f(x)* em um ponto x_0, quando existe, coincide com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa x_0. Você já estudou em Geometria Analítica como calcular a equação da reta tangente à curva no ponto x_0 dado. Então, vejamos como fazer isso.

A equação de uma reta não vertical passando em um ponto (x_0, y_0) é $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ onde *a* é o coeficiente angular da reta. Se *f(x)* é uma função derivável em $x = x_0$, segue da interpretação geométrica da derivada que a reta tangente ao gráfico de *f(x)* no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem coeficiente angular $m = f'(x_0)$. Assim, a equação da reta é dada por $y - f(x_0) = f(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Exemplo 1:

Encontre a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto (1, *f*(1)).

Resolução:

No exemplo 4, já calculamos $f'(1) = \frac{1}{2}$ que conforme a Definição 2.1.1 corresponde à inclinação da reta no ponto (1, *f*(1)). Então m = $f'(1) = \frac{1}{2}$. Agora, calcula-se $f(1) = \sqrt{1} = 1$.

Usando a equação $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, temos:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

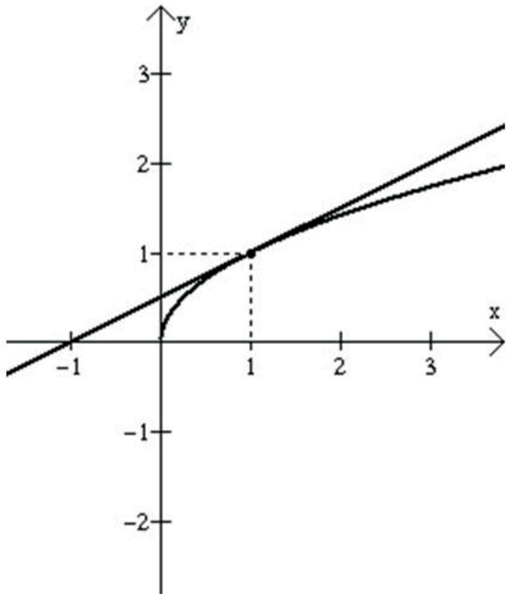
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, ou ainda, $x - 2y + 1 = 0$

Portanto, $x - 2y + 1 = 0$ é a equação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto (1, *f*(1)), como pode ser observado no gráfico (figura a seguir).

FIGURA 28 – GRÁFICO 1.4



FONTE: O autor

4 DERIVADAS LATERAIS

Definição 2.1.4 Seja *f(x)* uma função definida no intervalo aberto *I* e seja *a* um elemento de *I*.

(i) Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ existe e é finito, dizemos que *f(x)* possui *derivada à esquerda* em *a*, representada por $f'_-(a)$.

(ii) Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ existe e é finito, dizemos que *f(x)* possui *derivada à direita* em *a*, representada por $f'_+(a)$.

Uma função é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

Quando as derivadas laterais (esquerda e direita) existem e são diferentes em um ponto *a*, dizemos que este é um *ponto anguloso* do gráfico da função.

Exemplo 1:

Seja $f(x)=\begin{cases} x^2 & se \;\; x \le 0 \\ -x^2 & se \;\; x > 0 \end{cases}$. Verifique se *f(x)* é derivada no ponto $x_0 = 0$. Caso seja, calcule f ‘(0)=0.

Resolução:

Observe pelo gráfico (figura a seguir) que *f(x)* é contínua em $x_0 = 0$. Estudamos no Tópico 4 da Unidade 1 a continuidade das funções, vista na Definição 2.4.1. Assim, a verificação da continuidade fica a seu cargo.

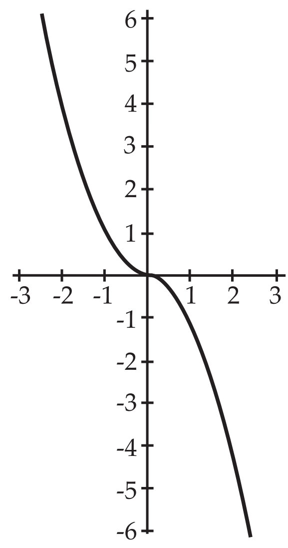
Para verificar se *f(x)* é derivada no ponto $x_0 = 0$, é necessário calcular as derivadas de f neste ponto, pois a expressão que define f à esquerda não é a mesma que define f à direita de 2.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(0+\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\Delta x.\Delta x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} \Delta x = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x\to +} \frac{-(0+\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(\Delta x.\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} -\Delta x = 0$$

Como $f'_-(0) = f'_+(0)$ concluímos que f é derivada no ponto $x_0 = 0$.

FIGURA 29 – *F(X)* É CONTÍNUA EM $X_0 = 0$



FONTE: O autor

Exemplo 2:

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \ \ x \leq 2 \\ -x+6 & se \ \ x > 2 \end{cases}$. Verifique se *f(x)* tem derivada no ponto $x_0 = 2$. Caso tenha, calcule *f´*(1).

Resolução:

Observe inicialmente que *f(x)* é contínua em $x_0 = 2$. Para verificar se *f(x)* tem derivada no ponto $x_0 = 2$, é necessário calcular as derivadas de *f(x)* neste ponto, pois a expressão que define *f(x)* à esquerda não é a mesma que define *f(x)* à direita de 2.

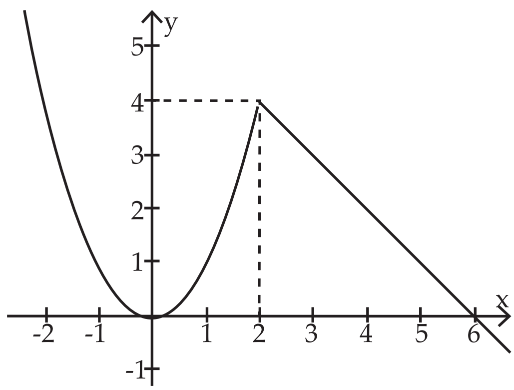
$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4.$$

Se $\Delta x \to 0^-$, então Δx é negativo e, portanto $2 + \Delta x < 2$. Como $f(x) = x^2$, se $x < 2$, segue que $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2$.

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(2+\Delta x) + 6 - 4}{\Delta x} = -1.$$

Como $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, concluímos que f não é derivável em $x_0 = 2$.

FIGURA 30 – GRÁFICO 1.6



FONTE: O autor

Exemplo 3:

Calcule as derivadas laterais da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & x \leq 3 \\ 4 - x, & 3 < x \leq 6 \end{cases}$ nos pontos $x_0 = 3$ e $x_0 = 6$.

Resolução:

Temos que:

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{4 - x - (3^2 - 8)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{3 - x}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} -1 = -1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 8 - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6$$

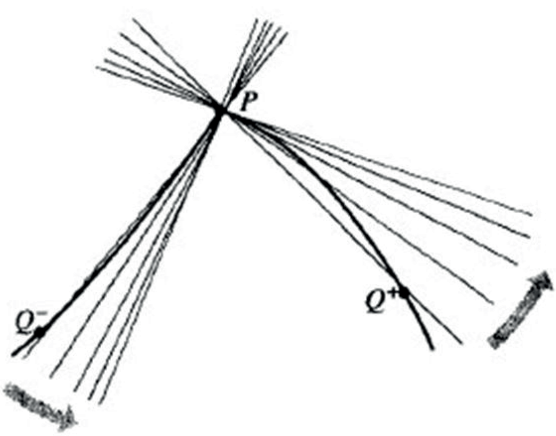
Como $f'_+(3) \neq f'_-(3)$, então $f(x)$ não é derivável em $x = 3$, isto é, não existe $f'(3)$.

Em $x_0 = 6$, temos $f'_-(6) = \lim_{x \to 6^-} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x \to 6^-} \frac{4 - x - (-2)}{x - 6} = \lim_{x \to 6^-} \frac{6 - x}{x - 6} = -1$.

Discutiremos a diferenciabilidade de uma função num ponto, segundo Finney (2002, p. 151-152):

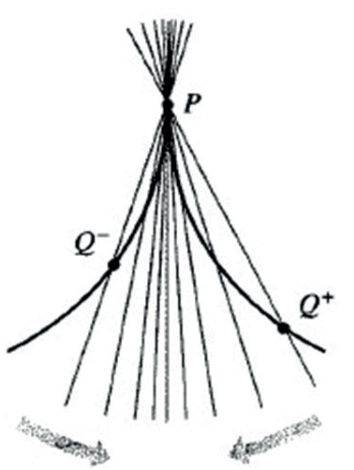
> **Quando uma Função Não Apresenta Derivada em um Ponto?**
> Uma função terá derivada em um ponto x_0 se os coeficientes angulares das retas secantes que passam por $P(x^o\ f(x_o))$ e um ponto Q próximo no gráfico tenderem a um limite à medida que Q se aproxima de P. Quando as secantes não têm uma única posição-limite ou se tornam verticais à medida que Q tende a P, a derivada não existe. Uma função não terá derivada em um ponto se o gráfico apresentar
> (1) um *bico*, onde as derivadas laterais são diferentes.

FIGURA 31 – (2) UM *PONTO CUSPIDAL*, ONDE O COEFICIENTE ANGULAR DE *PQ* TENDE A ∞ PARA UM LADO E A – ∞ PARA O OUTRO



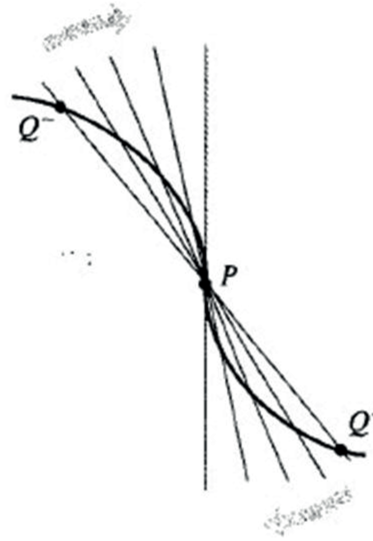
FONTE: O autor

FIGURA 32 – (3) UMA *TANGENTE VERTICAL*, ONDE O COEFICIENTE ANGULAR DE *PQ* TENDE A ∞ OU A – ∞ PARA AMBOS OS LADOS (AQUI, – ∞)



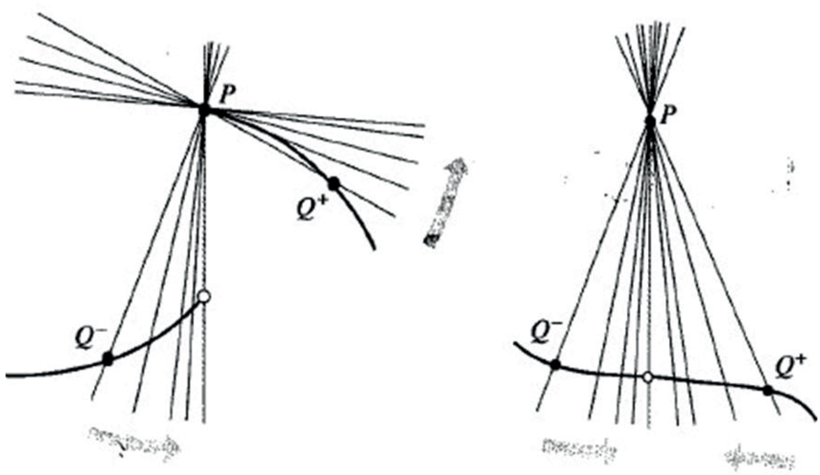
FONTE: O autor

FIGURA 33 – (4) UMA *DESCONTINUIDADE*



FONTE: O autor

FIGURA 34 – GRÁFICO 3.6



FONTE: O autor

5 CÁLCULO DAS DERIVADAS – REGRAS DE DERIVAÇÃO

Na resolução de problemas que envolvem derivadas aplicam-se algumas regras que nos permitem calcular a derivada sem usar diretamente os limites. Pois, todas as regras que veremos decorrem dos limites.

a) Derivada de uma constante

Se c é uma constante e $f(x) = 0$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Exemplo 1:

Se $f(x) = 5$, *então* e $f'(x) = 0$.

Exemplo 2:

Se $f(x) = 3\sqrt{2}$, então $f'(x) = 0$.

b) Derivada da função identidade

Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.

c) Derivada de uma função afim

Considerando a função $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais e a não nulo. Temos
$f'(x) = a$.

Exemplo 3:

Se $f(x) = 6x - 4$, então $f'(x) = 6$.

Exemplo 4:

Se $f(x) = 3 - 7x$, então $f'(x) = -7$.

Se $f(x) = - 2x + 9$, então $f'(x) = -2$.

d) Derivada de uma potência

Seja $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exemplo 5:

Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$.

Exemplo 6:

Se $f(x) = 3x^{1/5}$ então $f'(x) = 3x^{6/5}$.

e) Derivada da função cosseno

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}\, x$.

f) Derivada da função seno

Se $f(x) = \text{sen}\, x$, então $f\,'(x) = \cos x$.

g) Derivada da função logarítmica natural (base e)

Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\log_e x = \ln x$, também chamado de logaritmo neperiano.

h) Derivada do produto de uma constante por uma função

Sejam f uma função, c uma constante e g uma função definida por $g(x) = c{\cdot}f(x)$. Se $f\,'(x)$ existe, então $g\,'(x) = c{\cdot}f\,'(x)$.

Exemplo 7:

Se $f(x) = 2\text{sen}x$, então $f\,'(x) = 2\cos x$.

Exemplo 8:

Se $f(x) = 4\sqrt[3]{x} = 4x^{1/3}$ então $f'(x) = 4.\dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{4}{3}x^{-2/3}$.

Exemplo 9:

Se $f(x) = \dfrac{5}{3}\cos x$ então $f'(x) = \dfrac{5}{3}(-\text{sen}\, x) = -\dfrac{5}{3}\text{sen}\, x$.

Exemplo 10:

Se $f(x) = \dfrac{3}{8}x^4$ então $f'(x) = \dfrac{3}{8}.4x^3 = \dfrac{3}{2}x^3$.

i) Derivada de uma soma

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f\,'(x)$ e $g\,'(x)$ existirem, então $h\,'(x) = f\,'(x) + g\,'(x)$.

Exemplo 11:

Seja $f(x) = 2x^6 - \dfrac{4}{3}x^3 + 9$ então $f'(x) = 2.6x^5 - \dfrac{4}{3}.3x^2 + 0 = 12x^5 - 4x^2$.

Seja $g(x) = 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 4$ .. Então $g\,'(x) = 3.4x^3 + 5.3x^2 - 7.2x - 0 = 12x^3 + 15x^2$

$- 14x$.

Assim, $h'(x) = f'(x) + g'(x) = 12x^5 - 4x^2 + 12x^3 + 15x^2 - 14x = 12x^5 + 12x^3 + 11x^2 - 14x$.

j) Derivada de um produto

Sejam f e g duas funções quaisquer, consideremos h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Exemplo 12:

Calcule a derivada da função $h(x) = (7x^3 - 4x) \cdot (5 + 3x^2)$.

Resolução:

Conforme foi a definição acima, da derivada do produto, vamos identificar como f e g duas funções envolvidas no cálculo e derivá-los em seguida. Assim,
$f(x) = 7x^3 - 4x$ e $g(x) = 5 + 3x^2$
$f'(x) = 21x^2 - 4$ e $g'(x) = 6x$.

Aplicando a regra da derivada de um produto temos,
$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$h'(x) = (7x^3 - 4x).(6x) + (21x^2 - 4).(5 + 3x^2)$
$h'(x) = 42x^4 - 24x^2 + 105x^2 + 63x^4 - 20 - 12x^2$
$h'(x) = 105x^4 + 69x^2 - 20$

l) Derivada de um quociente

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então $h'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Exemplo 13:

Calcule a derivada da função $h(x) = \dfrac{4x^2 + 3x}{5x - x^3}$.

Resolução:

Conforme foi definido acima a derivada do quociente, vamos identificar como f e g duas funções envolvidas no cálculo e derivar em seguida. Assim,

$f(x) = 4x^2 + 3x$ e $g(x) = 5x - x^3$ e agora derivamos as funções
$f'(x) = 8x + 3$ e $g'(x) = 5 - 3x^2$.

Aplicando a regra da derivada de um quociente temos,

$$h'(x) = \frac{f'(x).\,g(x) - f(x).\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{(8x+3).\,(5x-x^3) - (4x^2+3x).\,(5-3x^2)}{[5x-x^3]^2}$$

$$h'(x) = \frac{40x^2 - 8x^4 + 15x - 3x^3 - 20x^2 + 12x^4 - 15x + 9x^3}{[5x-x^3]^2}$$

$$h'(x) = \frac{4x^4 + 6x^3 + 20x^2}{[5x-x^3]^2}$$

RESUMO DO TÓPICO 1

Caro(a) acadêmico(a), neste tópico você viu que:

- Iniciamos o tópico definindo a derivada dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. O importante aqui é saber que a derivada é dada por um limite.

- Como interpretação geométrica desta definição temos que a derivada corresponde à inclinação da reta tangente à curva num ponto dado.

- Vimos, também, que assim como temos os limites laterais, calculamos as derivadas laterais.

- Calculamos as derivadas a partir de algumas regras básicas.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nas questões de 1 a 5, calcule a derivada da função *f(x)*, no ponto x_0.

1) $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $x_0 = 5$

2) $f(x) = 2x^3$ no ponto $x_0 = 2$

3) $f(x) = x^4 + 3x$, no ponto $x_0 = 2$

4) $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $x_0 = 1$

5) $f(x) = 4 \,.\, e^x$ no ponto $x_0 = 2$

Nas questões de 6 a 13, encontre as derivadas das funções dadas:

6) $f(x) = 11x^5 - 6x^3 + 8$

7) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$

8) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

9) $f(x) = \dfrac{2 - x^3}{2x - 3}$

10) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{x^4}$

11) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$

12) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{5}$

13) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{2}{x^6}$

Assista ao vídeo de resolução da questão 4

Assista ao vídeo de resolução da questão 9

Nas questões de 14 a 16, calcule as derivadas laterais $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$, se existirem, e determine se f é derivável em x_0.

14) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

15) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3, & x\leq 2\\ 8x-11, & x>2\end{cases}$ no ponto $x_0 = 2$.

16) $f(x)=\begin{cases}5-6x, & x\leq 3\\ -4-x^2, & 3<x\end{cases}$ no ponto $x_0 = 3$.

Assista ao vídeo de resolução da questão 14

DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

1 INTRODUÇÃO

Para derivar uma função como $y = (2x^3 - 5)^7$, será que é preciso desenvolver o binômio?

Com o auxílio da regra da cadeia, que será estabelecida no próximo teorema, não é necessário perder tanto tempo. Note que $y = f \circ g$, sendo $f(x) = x^7$ e $g(x) = 2x^3 - 5$.

2 DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA – REGRA DA CADEIA

Então, a estratégia é escrever a função como uma composta de funções mais simples (como podemos ver as funções acima) que sabemos derivar facilmente. Assim,

$$f'(x) = 7x^6 \text{ e } g'(x) = 6x^2$$

Basta encontrar uma maneira de expressar $h'(x)$ em termos dessas duas derivadas conhecidas. Vamos juntar as duas funções derivadas e considerar a função composta $y = f \circ g$

$$y' = f(g(x))' = 7(2x^3 - 5)^6 . 6x^2 = 42x^2 (2x^3 - 5)^6$$

O fato de fornecer uma fórmula que permite derivar qualquer função composta com auxílio de outras regras de derivação faz com que este seja um dos teoremas mais importantes do Cálculo.

TEOREMA 2.2.1 (Regra da Cadeia) Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ é diferenciável no ponto x. Além disso, se

$$y = f(g(x)) \text{ e } u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

O nome regra da cadeia é apropriado, porque a derivada procurada é obtida como dois elos de uma cadeia de derivadas mais simples.

Vamos retomar o cálculo da derivada feito acima e escrevê-lo nos moldes do Teorema 2.2.1. Introduziremos uma outra variável, *u* que substituirá *g(x)*. Então,

$$y = u^7, \text{ onde } u = g(x) = 2x^3 - 5$$

Assim, derivando as funções *y* em termos da variável *u* e também *u* em termos da variável *x*, temos:

$$\frac{dy}{du} = 7u^6 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 6x^2$$

Logo, obtemos a derivada procurada com a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6 .6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 7\left(2x^3 - 5\right)^6 .6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 42x^2\left(2x^3 - 5\right)^6$$

Observe que esse processo é mais eficiente e mais rápido para calcular a derivada do que recorrer à enfadonha expansão binomial.

2.1 DERIVADA DE POTÊNCIAS DE x

Se $y = u^n$, onde $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então:

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$$

Exemplo 1:

Calcule $\dfrac{dy}{g(x)}$ se $y = \left(\dfrac{3}{2}x^4 - x^3 + 2x\right)^7$.

Resolução:

Tomamos $u = \dfrac{3}{2}x^4 - x^3 + 2x$ e $y = u^7$, obtemos que y = f(u(x)). Aplicando o Teorema 2.1.1, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6\left(6x^3 - 3x^2 + 2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2}x^4 - x^3 + 2x\right)^6 \cdot \left(42x^3 - 21x^2 + 14\right)$$

Exemplo 2:

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \sqrt[3]{4x^3 - x}$.

Resolução:

Primeiro é preciso escrever a função na forma de potência $y = \sqrt[3]{4x^3 - x} = \left(4x^3 - x\right)^{1/3}$.

Tomando $u = 4x^3 - x$ e $y = u^{1/3}$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando o Teorema 2.2.1, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}u^{-2/3} \cdot \left(12x^2 - 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4x^3 - x\right)^{-2/3} \cdot \left(4x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Exemplo 3:

Calcular a derivada de $y = (2x^3 + 4x + 1)^5$, onde x é um número real qualquer.

Resolução:

Fazendo $u = 2x^3 + 4x + 1$ e $f(u) = u^5$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = f'(u).u' = 5u^4.u' = 5(2x^3 + 4x + 1)^4(6x^2 + 4) = (2x^3 + 4x + 1)^4(30x^2 + 20)$.

2.2 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Se $y = a^u$, onde a é um elemento maior que 0 e diferente de 1, e $u = g(x)$ é uma função derivável, então

$$y = a^u \,.\, \ln a \,.\, u', \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Exemplo 4:

Calcular a derivada de $y = 4^{2x^4 + 2x^3 - 6x + 5}$.

Resolução:

Fazendo $u = 2x^4 + 2x^3 - 6x + 5$ e $f(u) = 4^u$, obtemos que $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = 4^u \,.\, \ln 4 \,.\, u'$

$$y' = 4^{2x^4 + 2x^3 - 6x + 5}.\ell n\, 4.(8x^3 + 6x^2 - 6).$$

UNI

Caso particular: Se y = en, então y´ = ex ln e = ex, onde e é o número neperiano, ou de Euler.

Exemplo 5:

Calcular a derivada de $y = e^{x^5 - 4x^3 - 7x^2 + 2}$.

Resolução:

Fazendo $u = x^5 - 4x^3 - 7x^2 + 2$ e $f(u) = e^u$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = e^u . u'$

$$y' = e^{x^5 - 4x^3 - 7x^2 + 2}\left(5x^4 - 12x^2 - 14x\right).$$

2.3 DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Se $y = \log_a u$ $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$ e $u = g(x)$ é uma função derivável, então

$$y' = \frac{u'}{u} \ell og_a\, e, \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Exemplo 6:

Calcular a derivada de $y = \log_3 (x^3 - 7x - 4)$.

Resolução:

Fazendo $u = x^3 - 7x - 4$ e $f(u) = \log_3 u$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia,

$$y' = \frac{u'}{u} \ell og_3\, e$$

$$y' = \frac{3x^2 - 7}{x^3 - 7x - 4} \ell og_3\, e$$

ATENÇÃO

Caso particular: Se $y = \ln u$ e $u = g(x)$ é uma função derivável, então $y' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemplo 7:

Calcular a derivada de $y = \ln (2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1)$.

Resolução:

Fazendo u = $2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1$ e $f(u) = \ln u$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = \dfrac{u'}{u}$

$$y' = \frac{10x^4 + 9x^2 - 4x}{2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1}.$$

2.4 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPOSTA

Se $y = u^v$, onde u = f(x) e v = g(x) são funções deriváveis, então:

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v .\ln u.v'$$

Exemplo 8:

Calcular a derivada de $y = \left(x^2 - 4\right)^{x^3 + 4x^2 - 6}$.

Resolução:

Fazendo $u = x^2 - 4$ e $v = x^3 + 4x^2 - 6$, obtemos $y = u^v$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v .\ln u.v'$

$$y' = \left(x^3 + 4x^2 - 6\right).\left(x^2 - 4\right)^{x^3+4x^2-7}.(2x) + \left(x^2 - 4\right)^{x^3+4x^2-6}.\ell n\left(x^2 - 4\right).\left(3x^2 + 8x\right)$$

$$y' = \left(2x^4 + 8x^3 - 12x\right).\left(x^2 - 4\right)^{x^3+4x^2-7} + \left(x^2 - 4\right)^{x^3+4x^2-6}.\ell n\left(x^2 - 4\right).\left(3x^2 + 8x\right)$$

2.5 DERIVADA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

(i) Se y = sen u, então y´ = cos u. u´.
(ii) Se y = cos u, então y´ = - sen u. u´.
(iii) Se y = tg u, então y´ = $\sec^2$ u. u´.
(iv) Se y = cotg u, então y´ = - cossec^2 u. u´.
(v) Se y = sec u, então y´ = sec u.tg u.u´.
(vi) Se y = cos sec u, então y´ = - cos sec u.tg u.u´.

Exemplo 9:

Calcular a derivada de y = sen $(x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x)$.

Resolução:

Fazendo u = $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x$ e $f(u)$ = sen u, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, y´= cos u.u´

$$y' = \cos(x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x) \,.\, (5x^4 - 9x^2 + 8x - 7)$$
$$y' = (5x^4 - 9x^2 + 8x - 7) \,.\, \cos(x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x)$$

Exemplo 10:

Calcular a derivada de $y = \cos\left(\dfrac{2x^2 - 5x}{3 - 7x}\right)$.

Resolução:

Fazendo $u = \dfrac{2x^2 - 5x}{3 - 7x}$ e $f(u)$ = cos u, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = -$ sen $u.u'$. Observe que, para derivar u, utilizamos a regra do quociente.

$$y' = -\text{sen}\left(\frac{2x^2 - 5x}{3 - 7x}\right).\left[\frac{(4x - 5).(3 - 7x) - (2x^2 - 5x).(-7)}{(3 - 7x)^2}\right]$$

$$y' = -\left[\frac{12x - 28x^2 - 15 + 35x + 14x^2 - 35x}{(3 - 7x)^2}\right]\text{sen}\left(\frac{2x^2 - 5x}{3 - 7x}\right)$$

$$y' = -\left[\frac{14x^2 + 12x - 15}{(3 - 7x)^2}\right]\text{sen}\left(\frac{2x^2 - 5x}{3 - 7x}\right)$$

Exemplo 11:

Calcular a derivada de $y = tg\ (-3x^2 + 8x - 3)$.

Resolução:

Fazendo $u = -3x^2 + 8x - 3$ e $f(u)$ = tg u, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, y´ = sec² u. u´

$$y' = \sec^2(-3x^2 + 8x - 3).\ (-6x + 8)$$
$$y' = (-6x + 8)\sec^2(-3x^2 + 8x - 3)$$

Exemplo 12:

Calcular a derivada de $y = \sec(5 - 4x^3)$.

Resolução:

Fazendo $u = 5 - 4x^3$ e $f(u) = \sec u$, obtemos $y = f(u(x))$. Aplicando a regra da cadeia, $y' = \sec u . \text{tg } u . u'$

$y' = \sec(5 - 4x^3) . \text{tg}(5 - 4x^3).(-12x^2)$
$y' = -12x^2 \sec(5 - 4x^3) . \text{tg}(5 - 4x^3)$

À medida que o leitor fica mais à vontade com a regra da cadeia, pode querer dispensar o uso das variáveis dependentes intermediárias, expressando a derivada na forma:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) . g'(x)$$

Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula consiste em chamar f de "função de fora" e g de "função de dentro" na composição f(g(x)). Veja no esquema a seguir:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) . g'(x)$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro

Derivada da função de dentro

3 DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

TEOREMA 2.2.2 (Derivada da função inversa) Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admite uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável, e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \text{ ; ou seja, } \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

A derivada de f^{-1} no ponto y é o inverso da derivada de f no ponto $f^{-1}(y)$.

UNI

Caro(a) acadêmico(a), caso não se recorde como encontrar a inversa de uma função, pesquise no caderno de Introdução ao Cálculo.

Exemplo 1:

Calcule a derivada da função inversa de $f(x) = 2 - 5x$.

Resolução:

Conforme o Teorema 2.2.2, basta encontrar $f'(x)$ e inverter o resultado calculado.

Assim, $f'(x) = -5$ e $g = f^{-1}$.

Portanto, $g'(y) = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$.

UNI

Também é possível obter a derivada da função inversa de outro modo. Neste caso, encontramos primeiro a função inversa e em seguida derivamos a função encontrada.

Veja como fica a resolução do exemplo 1 através deste outro procedimento. Sendo $f(x) = 2 - 5x$, a sua função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{5}$. Agora, temos que derivar a função inversa obtida. Assim, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{5}$.

Exemplo 2:

Seja $f(x) = 2x^5 + 3$, calcule a derivada da função inversa da $f(x)$.

Resolução:

Pelo Teorema 2.2.1, basta encontrar $f'(x)$ e inverter o resultado calculado.

Assim, $f'(x) = 10x^4$ e $g = f^{-1}$. Então, $g'(x) = \dfrac{1}{10x^4}$. Agora é preciso escrever x em função de y, pois lembre-se de que $x = g(y)$. Mas $y = f(x) = 2x^5 + 3$. Então,

$$2x^5 = y - 3$$

$$x^5 = \frac{y-3}{2}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{y-3}{2}}$$

Substituindo $x = \sqrt[5]{\frac{y-3}{2}}$ em $(f^{-1})(x) = \frac{1}{10x^4}$ temos:

$$g'(y) = \frac{1}{10\left(\sqrt[5]{\frac{y-3}{2}}\right)^4}$$

Portanto, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{10\left(\sqrt[5]{\frac{x-3}{2}}\right)^4}$

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico estudamos como derivar funções compostas. A seguir, uma lista das principais regras de derivação.

Sejam *u* e *v* funções deriváveis de *x,* e *n* uma constante.

1) $y = c \quad \Rightarrow y' = 0$

2) $y = u.v \quad \Rightarrow y' = u'.v + v'.u$

3) $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$

4) $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}\, u'$

5) $y = \ell og_a\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\ell og_a\, e$

6) $y = \ell n\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

7) $y = a^u \Rightarrow y' = a^u.\ln a.\ u',\ (a > 0,\ a \neq 1)$

8) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u\, u'$

9) $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = u' \cos u$

10) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \,\text{sen}\, u$

11) $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$

12) $y = \cot g\, u \Rightarrow y' = -u' \ \cos\sec^2\ u$

13) $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u\, .\text{tg}\, u$

14) $y = \cos\sec u \Rightarrow y' = -u' \cos\sec u\, .\, \text{cotg}\, u$

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo das derivadas.

Nos exercícios 1 a 8, encontre a função derivada das seguintes funções:

1) $f(x) = (3x^2 + 7x - 3)^{10}$

2) $f(t) = \left(t - \dfrac{1}{t}\right)^4$

3) $f(x) = 2e^{3x^2+6x+7}$

4) $f(u) = \dfrac{2u}{3u - 1}$

5) $f(\theta) = \text{sen}(2\theta + 4)$

6) $f(t) = \left(\dfrac{1}{1+t}\right)^4$

7) $y = x^3 \text{cossec} x$

8) $f(u) = \ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$

Nos exercícios 9 e 10, determine a derivada da função inversa:

9) $f(x) = 8x^3$

10) $f(x) = x^2 + 2,\ x \in [-3,\ 0]$

Assista ao vídeo de resolução da questão 6

Assista ao vídeo de resolução da questão 8

DERIVADA DE FUNÇÕES IMPLÍCITAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

Até aqui, estudamos as funções em que a variável dependente y é dada explicitamente em termos da variável independente x através de uma relação y = f(x).

2 DERIVADAS IMPLÍCITAS

Há funções, contudo, que são definidas implicitamente através de uma equação da forma $F(x,y) = 0$ envolvendo as variáveis x e y. Um exemplo simples é a equação da circunferência de raio 1 dada como $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Nesse caso, é possível resolver a equação em y, obtendo-se as funções:

$$y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1] \text{ e } y = -\sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$$

Há equações mais complicadas, onde a resolução explícita de y em termos de x não é simples ou possível como é o caso da equação:

$$2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0$$

O objetivo da regra de derivação implícita é o de calcular a derivada de y como função de x, quando y é dada implicitamente.

Como proceder? A regra consiste em derivar os dois membros da equação em relação a x usando a regra da cadeia quando preciso e, em seguida, isolar o termo y.

Na verdade, queremos conhecer $y' = f'(x)$ sem mesmo conhecer $f(x)$.

Exemplo 1:

Encontre a derivada da função definida implicitamente por $2x^2 - y^3 - 1 = 0$.

Resolução:

Vamos derivar ambos os lados da equação em relação a x. Como y é uma função de x (y é a função implícita!), devemos usar a regra da cadeia para derivar y^3.

Temos, $4x - 3y^2y' - 0 = 0$

Portanto, $y' = \dfrac{4x}{3y^2}$.

Neste exemplo, é fácil explicitar y como função de $x: y = \sqrt[3]{2x^2 - 1} = f(x)$. Se calcularmos y' através das regras de derivação apenas para confirmar o resultado, obtemos:

$$y' = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 1\right)^{-\frac{2}{3}}.4x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2 - 1\right)^2}} = \frac{4x}{3\left(\sqrt[3]{2x^2 - 1}\right)^2} = \frac{4x}{3y^2}.$$

Mas, isso pode ser mais complicado em outras funções.

Exemplo 2:

Encontre a derivada da função definida implicitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Resolução:

Derivamos os dois membros da equação (a) em relação a x obtemos $2x + 2yy' = 0$. Isolando o termo y', obtém-se que $2yy' = -2x$. Suponha que existe um intervalo onde y é derivável e onde $y \neq 0$. Segue que $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Exemplo 3:

Encontre a derivada da função definida implicitamente por $2xy^2 + \cos(xy) + 1 = 0$.

Resolução:

Derivando os dois membros da equação (b) em relação a x obtemos $2y^2 + 2x2yy' - \text{sen}(xy).[y + xy'] = 0$. Isolando o termo y': $y' = \dfrac{-2y^2 - y\,\text{sen}(xy)}{4xy + x\,\text{sen}(xy)}$. Também nesse caso pressupõe-se a existência de um intervalo onde y é derivável, $x \neq 0$ e $4y + \text{sen}(xy) \neq 0$.

UNI

São quatro os passos para derivar implicitamente uma função:

Passo 1: Derive os dois lados da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável de x.

Passo 2: Reúna os termos que contém $y' \left(\frac{dy}{dx}\right)$ em um lado da equação.

Passo 3: Fatore isolando $y' \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Passo 4: Encontre $y' \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Exemplo 4:

Determine os coeficientes angulares das retas tangentes à circunferência cujo centro é o ponto (3,5) e cujo raio é 2, em cada um dos pontos de abscissa 4.

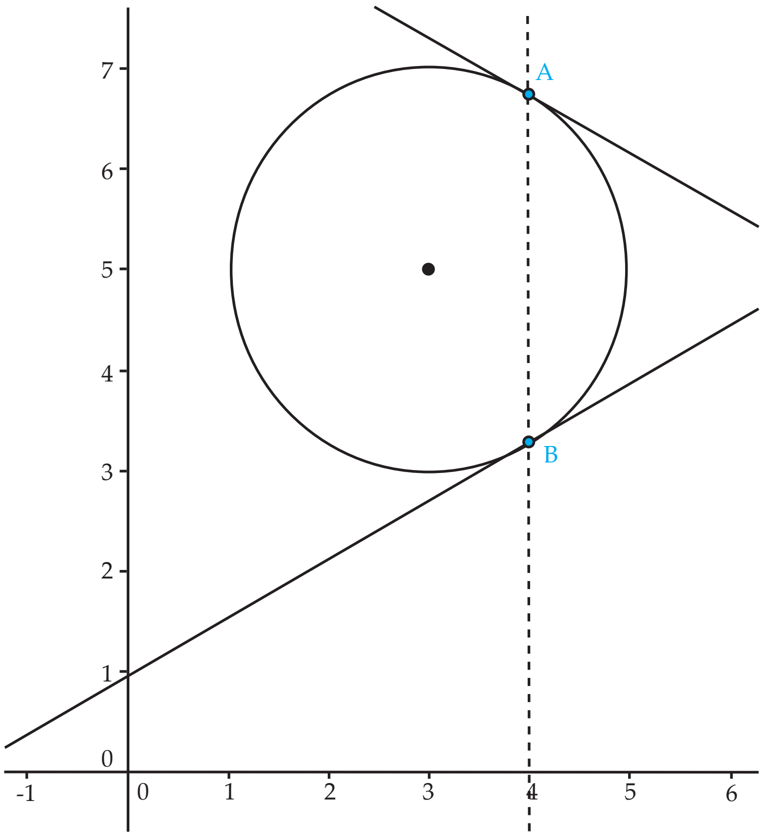
Resolução:

A equação reduzida da circunferência é: $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ ou, desenvolvendo as potências, temos a equação geral: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$.

Para $x = 4$, tem-se $y = 5 \pm \sqrt{3}$.. Portanto, os pontos de tangência são: $A\left(4,\ 5+\sqrt{3}\right)$ e $B\left(4,\ 5-\sqrt{3}\right)$.

A equação da circunferência define duas funções deriváveis no intervalo (1,5): $f_1(x)$, cujo gráfico é a semicircunferência acima da reta $y = 5$ que contém o ponto A, e $f_2(x)$, cujo gráfico é semicircunferência inferior que contém o ponto B. (Veja a figura a seguir). O coeficiente angular das retas tangentes s e t é $f_1'(4)$ e $f_2'(4)$, respectivamente.

FIGURA 35 – GRÁFICO 3.1



FONTE: O autor

Derivando implicitamente a equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, temos:

$$2x + 2yy' - 6 - 10 = 0$$

$$y' = \frac{6 - 2x}{2y - 10}$$

que é a expressão da derivada, tanto de f_1 como de f_2.

Logo, $f_1'(4) = \dfrac{6 - 2.4}{2\left(5 + \sqrt{3}\right) - 10} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad f_2'(4) = \dfrac{6 - 2.4}{2\left(5 - \sqrt{3}\right) - 10} = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, os coeficientes angulares das retas s e t são $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, respectivamente.

3 DERIVADAS SUCESSIVAS (OU DE ORDEM SUPERIOR)

Seja *f* uma função derivável num subconjunto *A* do seu domínio. A função $f': A \to R$ é também chamada de *derivada primeira* ou de *derivada de primeira ordem de f*.

Definição 2.3.1 Seja *f* uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de f* e é representada por $f''(x)$ (lê-se *f*-duas linhas de *x*) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se derivada segunda de *f* em relação a *x*).

Exemplo 1:

Determine a segunda derivada da função $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

Resolução:

Se $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 6$, então:
$f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$
$f''(x) = 24x - 14$

Seguindo o procedimento da definição 2.3.1 sucessivamente e supondo que para algum $n \in N$ esteja definida a função derivada de ordem *n - 1* de *f* indicada como $f^{(n-1)}$, Chamamos as funções $f'(x), f''(x), f'''(x)$ ... de derivadas sucessivas de *f*.

Exemplo 2:

Seja a função $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$. Obtenha $f''(x), f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x)$ e $f^{(n)}(x)$ para *n* qualquer.

Resolução:

Sendo $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$, temos:
$f'(x) = 4x^3 + 6x$
$f''(x) = 12x^2 + 6$
$f'''(x) = 24x$
$f^{(IV)}(x) = 24$

Repare que, a partir da derivada de quinta ordem, todas serão iguais a zero, ou seja, $f^{(n)}(x) = 0,\ \forall n \geq 5$.

Exemplo 3:

Determine a derivada de ordem *n* da função $f(x) = e^{x/3}$.

Resolução:

Se $f(x) = e^{x/3}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3^2}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3^2}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3^3}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{27}e^{\frac{x}{3}}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3^4}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{81}e^{\frac{x}{3}}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3^n}e^{\frac{x}{3}}$$

Exemplo 4:

Seja $g(t) = sen\ t + cos\ t$. Calcule a derivada de ordem 35 da função g.

Resolução:

Se $g(t) = sen\ t + cos\ t$, então:
$g'(t) = cos\ t - sen\ t$
$g''(t) = -\ sen\ t - cos\ t$
$g'''(t) = -\ cos\ t + sen\ t$
$g^{(4)} = sen\ t + cos\ t$
$g^{(5)} = cos\ t - sen\ t$

Note que $g^{(4)} = g$. Consequentemente, $g^{(5)} = g'$, $g^{(6)} = g''$ e assim por diante, ou seja, as derivadas se repetem após quatro derivações. Para obter $g^{(35)}(t)$, basta dividir 35 por 4 e tomar o resto da divisão, que é 3.

Logo, $g^{(35)}(t) = g'''(t) = -\ cos\ t + sen\ t$.

4 TAXA DE VARIAÇÃO

Quase sempre ouvimos falar que a taxa de desemprego variou x% de um período para o outro. Assim como os índices de desemprego variam a uma certa taxa, encontramos diversos problemas que envolvem uma taxa de variação, por exemplo: um automóvel realiza um determinado percurso em certo tempo. Sabemos que a velocidade do automóvel não é constante devido às curvas, tráfego intenso, portanto, intuitivamente percebemos uma variação na velocidade do automóvel. Em economia, quando queremos saber a variação dos lucros ou custos de uma empresa. Na biologia, para calcular como varia a quantidade de bactérias de uma colônia com o tempo. Na engenharia, como varia o comprimento de um cano de metal conforme muda a temperatura.

Definição 2.3.2 (Taxa Média de Variação) A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

A taxa de variação média indica quanto, em média, variou a função por unidade de variação no intervalo considerado.

Exemplo 1:

Suponha que no intervalo de sete anos, uma árvore cresceu de 30 cm para 121 cm. Calcule a taxa de variação média de crescimento desta árvore neste período de tempo.

Resolução:

Para calcular a taxa de variação média utilizaremos a Definição 2.3.2. Assim,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{121 - 30}{7 - 0}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{91}{7} = 13$$

Portanto, isso significa que a árvore cresceu 13 cm a cada ano, em média.

Podemos reescrever o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ definido acima como taxa média de variação da seguinte forma $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ onde foi substituído x1 por x0 + Δx e x1 – x0 por Δx.

Vamos definir o que se entende por *taxa de variação de* y *em relação a* x quando y é uma função de x.

Definição 2.3.3 A derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a taxa instantânea de variação ou, simplesmente, taxa de variação de y em relação a x.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação.

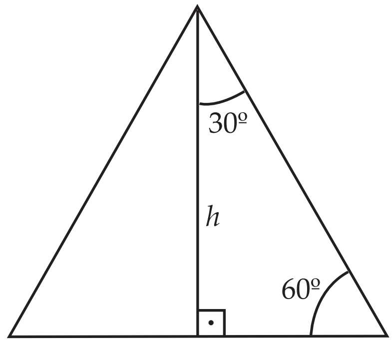
Exemplo 2:

Supondo que esteja caindo areia sobre uma base plana e horizontal a uma razão de 12 m^3 por hora e que o monte mantém sempre a forma de um cone cuja geratriz forma um ângulo de 60° com a base. Calcule a velocidade com que a altura do monte aumenta, no instante em que ela é de 6 metros.

Resolução:

Representando por h a altura do cone e por r o raio de sua base, o seu volume é dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

FIGURA 36 – A ALTURA DO CONE E POR *R* O RAIO DE SUA BASE, O SEU VOLUME É DADO POR $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$



FONTE: O autor

Como $tg\,60° = \sqrt{3}$ temos $\dfrac{h}{r} = \sqrt{3}$, ou seja, $r = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Assim, o volume é uma função de h dada por $V(h) = \dfrac{\pi h^3}{9}$.

Como a areia cai a uma razão de 12 m^3/hora, a taxa de variação do volume do cone de areia é $\dfrac{dV}{dt} = 12$.

A velocidade de aumento da altura que queremos determinar é a taxa de variação de *h* em relação ao tempo: $\dfrac{dh}{dt}$.

Como o volume é uma função de *h*, e *h* é uma função de *t*, temos *V(t) = (V . h)(t)*

Pela regra da cadeia temos, então, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh}\,\dfrac{dh}{dt}$.

Como $\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{3\pi h^2}{9} = \dfrac{\pi h^2}{3}$, temos:

$12 = \dfrac{\pi h^2}{3}\,\dfrac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}$ e $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{36}{\pi h^2}$

Logo, $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=6} = \dfrac{36}{\pi 6^2} = \dfrac{1}{\pi}$, e a velocidade desejada é $\dfrac{1}{\pi}$ m/hora.

Exemplo 3:

Supondo que a massa de uma árvore destinada à produção de papel, aos dois anos, seja aproximadamente 40kg, aos quatro anos 128kg, e aos oito anos, 256kg. Então o polinômio $p(t) = 12t^2 - t^3$ fornece o valor aproximado da massa da árvore em qualquer momento t entre dois e oito anos. Determine a taxa de variação instantânea (aproximada) de sua massa, num instante t qualquer entre dois e oito anos.

Resolução:

Sendo $p(t) = 12t^2 - t^3$ a função que representa a massa em função do tempo.

A taxa de variação desejada é então $p'(t) = 24t - 3t^2$.

Assim, por exemplo, no momento em que a árvore completa quatro anos, a taxa de variação da sua massa é aproximadamente 48 kg/ano, pois $p'(4) = 48$, e quando completa seis anos esta taxa é aproximadamente 36 kg/ano, pois $p'(6) = 36$.

5 TAXAS RELACIONADAS

Em muitos problemas surgem uma ou mais variáveis que são funções de uma outra variável, que geralmente é o tempo. Digamos, F depende de x e y que, por sua vez, são ambas funções do tempo t. Ocorre que normalmente não conhecemos a expressão destas funções de t.

As principais ferramentas usadas para resolver problemas que apresentam estas características são: a regra da cadeia e a derivação implícita.

Lembre-se de que, se F é uma função derivável de x, e x é uma função derivável de t, então a regra da cadeia diz que F é uma função derivável de t e $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Nos problemas a seguir tentaremos encontrar a taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras, cujas taxas de variação são conhecidas.

Exemplo 1:

Um balão esférico é enchido de modo que o seu volume aumenta à razão de 2 cm^3/s. Com que taxa aumenta o raio do balão no instante em que este mede 5 cm?

Resolução:

Enquanto o balão é enchido, seu volume V é uma função de raio R e o raio é uma função do tempo t (a qual não conhecemos). Então V é também função de t. Para resolver o problema, devemos escrever o(s) dado(s) e o que é pedido em notação de derivadas.

Dado: $\frac{dV}{dt} = 2$ cm³ /s; pede-se: $\frac{dR}{dt}$ quando $R = 5$.

Para estabelecer a relação entre $\frac{dV}{dt}$ e $\frac{dR}{dt}$, devemos derivar V em relação a t usando a regra da cadeia. Como V representa o volume de uma esfera de raio R, temos: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}$. Como $\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2$, temos $\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}$.

Pelo enunciado $\frac{dV}{dR} = 2$

Logo, $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\pi R^2}$

Para R = 5, temos $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{50\pi} \cong 0{,}0064 \text{ cm/s}$.

Isto significa que o raio aumenta à taxa de $\frac{1}{50\pi}$ cm/s quando ele vale 5 cm.

ATENÇÃO

Note que a taxa de variação do raio é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

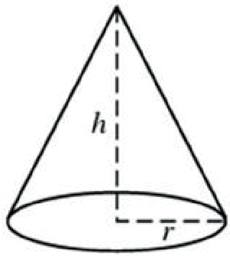
Exemplo 2:

Em uma serraria, a serragem cai formando um monte em forma de cone circular reto a uma taxa de 0,25m³ por hora. A geratriz do cone faz um ângulo de 45° com o solo, que é plano. Com que velocidade sobe o topo do monte no momento em que este se encontra a quatro metros do solo?

Resolução:

Seja t o tempo, em horas, contado a partir do momento em que a serragem começa a cair. Seja V o volume de serragem que caiu em t horas.

FIGURA 37 – 3.3

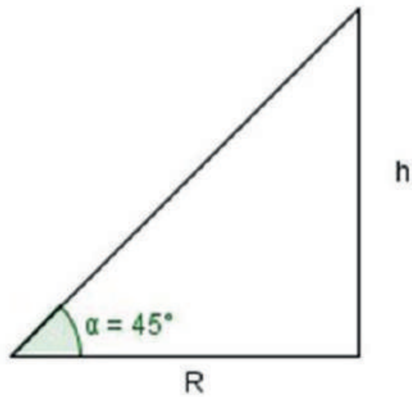


FONTE: O autor

Sejam h e R a altura e o raio da base, respectivamente, do cone formado pela serragem. Os dados do problema são:

$\dfrac{dV}{dt} = 0,25\ m^3/h$ e outro é ilustrado através da figura a seguir.

FIGURA 38 – 3.4



FONTE: O autor

Pede-se: $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 4$ m. A relação entre as variáveis V, R e h é estabelecida pela fórmula do volume do cone $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$. Mas é possível escrever V como função de uma das variáveis: R ou h.

Observando a Figura 3.4, temos que: $tg45° = \dfrac{h}{R}$ e como $tg45^o = 1$, segue que $R = h$.

Logo, $V = \dfrac{\pi h^3}{3}$.

Note que V é função de h e h é função de t. Conforme a regra da cadeia: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt}$, ou seja, $\dfrac{1}{4} = \pi h^2 . \dfrac{dh}{dt} \Rightarrow \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{4\pi h^2}$.

Para $h = 4$, temos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{64\pi} m/h$.

Isto significa que no momento em que o topo do monte está a quatro metros do solo, ele sobe com velocidade de $\dfrac{1}{64\pi} m/h$.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico você viu que:

- Começamos vendo que é possível derivar uma função mesmo que a variável dependente não esteja isolada, ou seja, que a função não apresente $y = f(x)$ na sua forma mais usual.

- Nas derivadas sucessivas, vimos que podemos derivar por várias vezes uma função, desde que a função resultante seja também derivável.

- Resolvemos problemas envolvendo taxa de variação e taxas relacionadas, que nada mais são do que derivadas de funções de uma ou mais variáveis.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios 1 a 3, encontre a derivada da função definida implicitamente por

1) $x^2 - y^2 = 1 - y^3$
2) $xe^{2y} - x^2y^2 + x - 1 = 0$
3) $x^4 + 4x^3y + y^4 = 1$

Nos exercícios 4 a 6, encontre as derivadas sucessivas das funções a seguir:

4) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ obtenha a derivada de 2ª ordem
5) $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 2x - 8$ obtenha as derivadas de 3ª e 7ª ordem
6) $f(x) = (3t - 2)^3$ obtenha a derivada de 2ª ordem.

7) Seja $s(t) = 2t + 3t^2$, para $t > 0$, a equação do movimento de uma partícula P, com s em metros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula quando $t = 5$ segundos.

8) O IPC da economia é descrito pela função $g(t) = -0{,}2t^3 + 3t^2 + 100$ $(0 \leq t \leq 9)$ onde $t = 0$ corresponde ao início em 1998. Calcule as derivadas de primeira e segunda ordem da função IPC no tempo 6.

9) Uma certa espécie de tartaruga está ameaçada de extinção em virtude de comerciantes estarem vendendo supercarregamentos de ovos como afrodisíaco. Depois que várias medidas de preservação forem implementadas espera-se que a população de tartarugas cresça de acordo com a regra

$$N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1000 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

onde $N(t)$ denota o tamanho da população ao fim do ano t. Calcule $N''(2)$ e $N''(8)$, interpretando os resultados.

10) Suponhamos que o óleo derramado através da ruptura de um navio-tanque se espalhe em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 pés/s. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando seu raio for de 60 pés?

Assista ao vídeo de resolução da questão 3

Assista ao vídeo de resolução da questão 7

Assista ao vídeo de resolução da questão 10

TÓPICO 4

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES I

1 INTRODUÇÃO

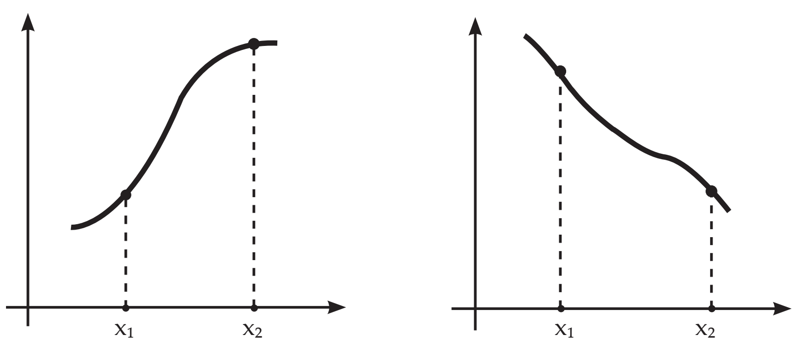
O objetivo desse tópico é dar condições para usarmos a derivada como ferramenta para descobrir rapidamente os aspectos mais importantes de uma função e esboçar seu gráfico.

2 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Nesta seção discutiremos sobre os termos *crescente, decrescente* e *constante,* que são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo, à medida que percorremos seu gráfico da esquerda para a direita.

Na figura a seguir mostramos dois gráficos de funções crescente e decrescente.

FIGURA 39 – FUNÇÕES CRESCENTE E DECRESCENTE



FONTE: O autor

Definição 2.4.1 Seja $f(x)$ definida em um intervalo e sejam x_1 e x_2 pontos deste intervalo.

(i) f é *crescente* no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.
(ii) f é *decrescente* no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.
(iii) f é *constante* no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.

Teorema 2.4.1 Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b).

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é *crescente* em $[a,b]$.
(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é *decrescente* em $[a,b]$.
(iii) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é *constante* em $[a,b]$.

Exemplo 1:

Encontre os intervalos nos quais $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

Resolução:

A figura a seguir mostra o gráfico da função f que sugere que f seja decrescente para $0 \leq x \leq 3$ e crescente nos demais intervalos. Para confirmar o que vimos no gráfico de *f*, vamos analisar o sinal das derivadas de *f*.

Seja $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$, então $f'(x) = 6x^2 - 18x$.

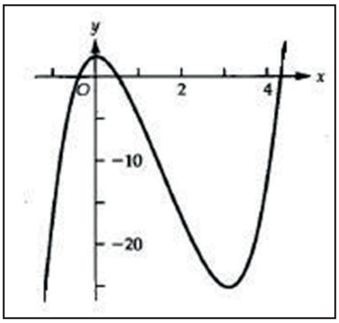
Aplicando o Teorema 4.1.1 tem-se que

$f'(x) > 0$ se $x < 0$ pois $f'(-1) = 6(-1)^2 - 18(-1) > 0$
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 3$ pois $f'(1) = 6(1)^2 - 18(1) < 0$
$f'(x) > 0$ se $x > 3$ pois $f'(4) = 6(4)^2 - 18(4) > 0$

Logo, concluímos que:

f é crescente em $(-\infty, 0]$
f é decrescente em $[0, 3]$
f é crescente em $[3, +\infty)$.

FIGURA 40 – GRÁFICO 4.2

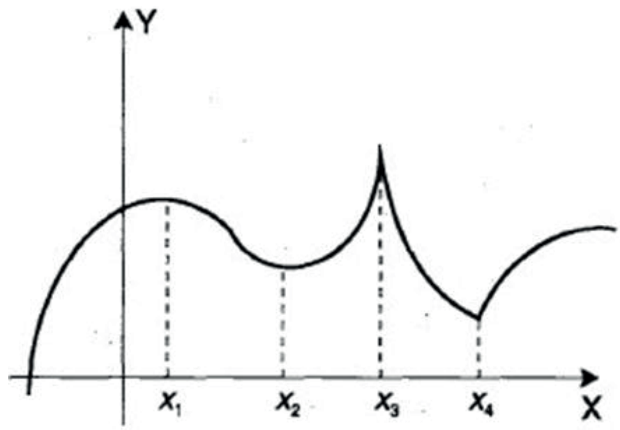


FONTE: O autor

3 MÁXIMOS E MÍNIMOS

A figura a seguir nos mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

FIGURA 41 – GRÁFICO 4.3



FONTE: O autor

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos*.

Definição 2.4.2 Dizemos que uma função f tem um ***máximo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x no intervalo.

Definição 2.4.3 Dizemos que uma função f tem um ***mínimo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x no intervalo.

Teorema 2.4.2 Suponha que f seja definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0. Se f tem um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ é um ***ponto crítico*** de f, assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0.

Exemplo 1:

Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = x^4 + 4x^3$.

Resolução:

A função f, por ser polinomial, é diferenciável em todo o domínio.

Para encontrarmos os pontos críticos devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Então,

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 0$
$4x^2 (x + 3) = 0.$
Logo, $x = -3$ e $x = 0$ são pontos críticos de f.

Exemplo 2:

Encontre os pontos extremos relativos de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

Resolução:

A função f, por ser polinomial, é diferenciável em todo o domínio.

Para encontrarmos os pontos críticos devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Então
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$
$4x(x^2 - 3x + 2) = 0.$

Logo, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ são pontos críticos de f.

A partir dos três valores obtidos acima, ficam determinados quatro intervalos: $x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$ e $x > 2$ dos quais analisaremos o comportamento para concluirmos que extremos são estes.

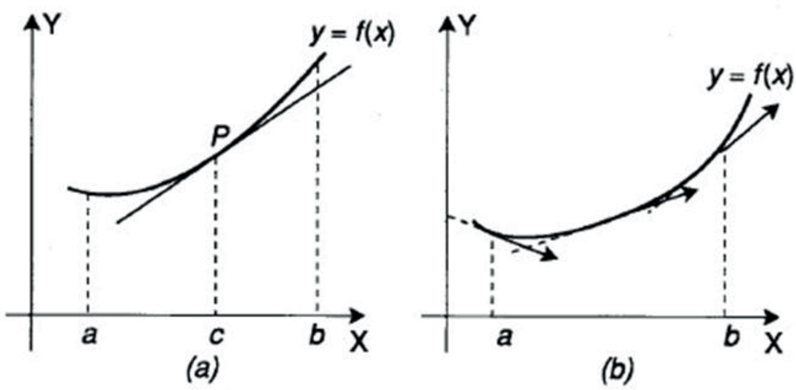
Observação: Para preencher a segunda e terceira colunas da tabela a seguir temos que definir o sinal das derivadas nos intervalos. A fim de facilitar os cálculos, escrevemos $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ de maneira decomposta $f'(x) = x(x - 1)(x - 2)$ e aí, em cada intervalo escolhe-se um valor para x. Por exemplo, para $x < 0$ tome $x = -1$ e aí o cálculo $f'(-1) = (-1)(-1-1)(-1-2) = (-1)(-2)(-3)$ fica facilitado.

Intervalo	**x(x-1) (x-2)**	**$f'(x)$**	**Conclusão**
$x < 0$	(-)(-)(-)	-	f é decrescente
$x = 0$	0	0	f tem um mínimo relativo em (0,0)
$0 < x < 1$	(+)(-)(-)	+	f é crescente
$x = 1$	0	0	f tem um máximo relativo em (1,1)
$1 < x < 2$	(+)(+)(-)	-	f é decrescente
$x = 2$	0	0	f tem um mínimo relativo em (2,0)
$x > 2$	(+)(+)(+)	+	f é crescente

4 CONCAVIDADE

Na figura a seguir observamos que, dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c, o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto P(c, f(c)). Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a,b).

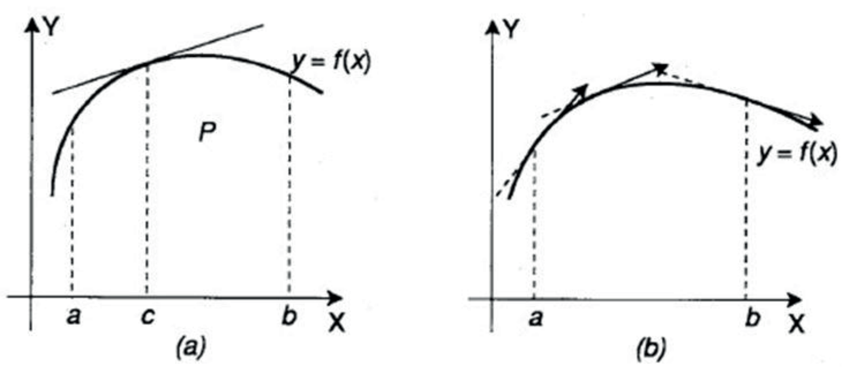
FIGURA – 42 GRÁFICO 4.4 (a)



FONTE: O autor

Da mesma forma, a figura a seguir descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (*a*, *b*).

GRÁFICO 43 – FUNÇÃO 4.5



FONTE: O autor

Definição 2.4.4 Se f é diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que f tem concavidade voltada para cima no intervalo aberto se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

Definição 2.4.5 Se *f* é diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que *f* tem concavidade voltada para baixo no intervalo aberto se $f'(x)$ é decrescente neste intervalo.

Teorema 2.4.3 Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto (a,b).

(i) Se $f''(x) > 0$ para todo valor de x em (a,b), então f tem concavidade voltada *para cima* em (a,b).
(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo valor de x em (a,b), então f tem concavidade voltada *para baixo* em (a,b).

Exemplo 1:

Identifique o comportamento da concavidade da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ nos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Resolução:

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de f, obtemos

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$
$f''(x) = 6x - 6$.

Pelo Teorema 2.4.3, devemos fazer a análise do sinal da segunda derivada.

Escolhemos um valor de x no intervalo $(-\infty, 1)$, por exemplo, $x = -1$ para obtermos a concavidade deste intervalo. Assim,

$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$ então f tem a concavidade voltada para baixo.

E escolhemos um valor de x no intervalo $(1, +\infty)$, por exemplo, $x = 4$, para obtermos a concavidade deste intervalo. Assim,

$f''(4) = 6(4) - 6 = 18 > 0$ então f tem a concavidade voltada para cima.

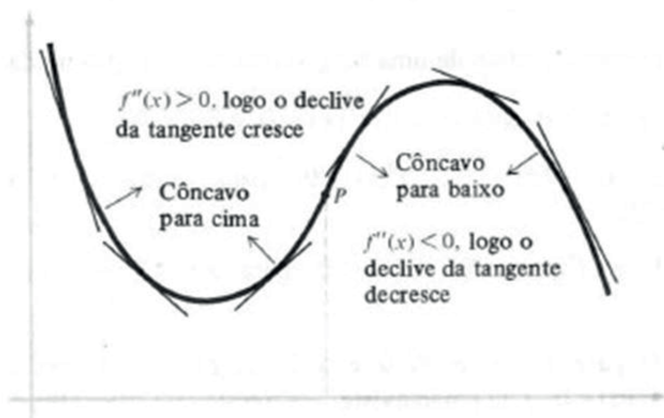
Portanto, f tem a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, 1)$ e a concavidade voltada para cima em $(1, +\infty)$.

5 PONTOS DE INFLEXÃO

Vimos no Exemplo 1 acima que a concavidade da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ que é inicialmente côncava para baixo muda para côncava para cima em $x = 1$. Os pontos em que uma curva muda a concavidade são chamados de pontos de inflexão.

Definição 2.4.6 Se f é contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 e muda de concavidade no ponto $(x_0,f(x_0))$, então dizemos que o ponto x_0 do domínio, ou o ponto $(x_0,f(x_0))$ do gráfico, é um ponto de inflexão de f (figura a seguir).

FIGURA 44 – GRÁFICO 4.6



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Determinar as coordenadas do ponto de inflexão da função $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ e analise a concavidade da função nos intervalos $(-\infty, 1)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$.

Resolução:

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de f, obtemos:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
$f''(x) = 12x^2 - 12x$

A análise de sinais da segunda derivada é mostrada na tabela a seguir.

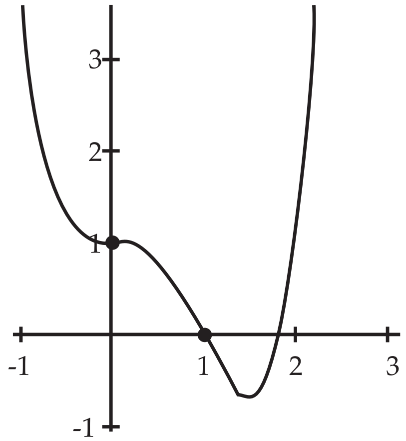
Intervalo	**f''(x) = 12x² - 12x**	**Conclusão**
$x < 0$	+	f tem concavidade voltada para cima em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 1$	-	f tem concavidade voltada para baixo em $(0, 1)$
$x > 1$	+	f tem concavidade voltada para cima em $(1, +\infty)$

Pelas conclusões obtidas na tabela anterior, há dois pontos de inflexão: em $x = 0$ e $x = 1$, pois f muda a concavidade nestes pontos.

Os pontos de inflexão são $(0,f(0)) = (0,1)$ e $(1,f(1)) = (1,0)$.

Estas conclusões podem ser observadas no gráfico de f (figura a seguir).

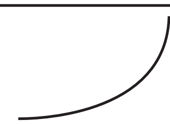
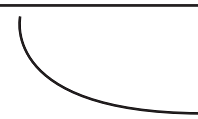
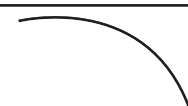
FIGURA 45 – GRÁFICO 4.7



FONTE: O autor

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico estudamos formas de definir função crescente ou decrescente, pontos de máximo ou mínimo, definir quanto à concavidade das funções e também pontos de inflexão. A seguir é apresentado um quadro-resumo destes itens.

Sinal de f' e f''	Propriedades do gráfico f	Forma geral do gráfico
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f crescente f côncava para cima	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f crescente f côncava para baixo	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f decrescente f côncava para cima	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decrescente f côncava para baixo	

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios de 1 a 3, identifique o comportamento das funções em crescente e decrescente nos intervalos indicados.

1) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$ em $(-\infty, 1]$ e $[2,3]$
2) $f(x) = x^3 - 8$ em $[-3,5]$
3) $f(x) = x^2 - x + 5$ em $[-3,0]$ e $[2,6]$

Nos exercícios de 4 a 6, identifique o comportamento das funções quanto à concavidade nos intervalos indicados.

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ em $(-5,1)$ e $(2, +\infty)$
5) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$ em $(-\infty, -2)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e $(4, +\infty)$
6) $f(x) = 3x^{5/3} - 5x$ em $(-\infty, -1)$ e $(0,7)$

Nos exercícios de 7 e 8, encontre os extremos relativos e os pontos de inflexão das funções a seguir.

7) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

8) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

TÓPICO 5

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES II

1 INTRODUÇÃO

Dada uma curva $y = f(x)$, usaremos a derivada para obter alguns dados acerca da curva. Nesta seção discutiremos critérios para o uso de derivadas e as retas assíntotas que auxiliaram nestes procedimentos.

Esses dados nos levam a um método geral para construir esboços de gráficos de funções.

2 TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

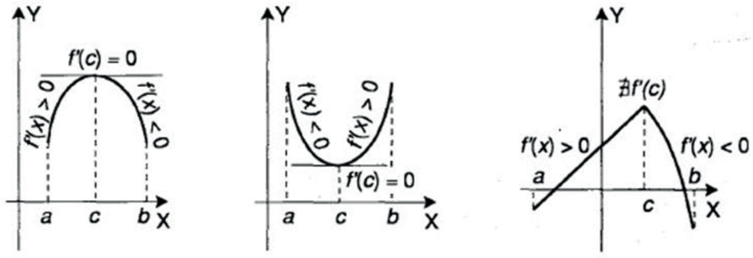
Teorema 2.5.1 (Teste da derivada primeira) Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.

(i) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.

(ii) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.

(iii) Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f não tem um extremo relativo em x_0.

FIGURA 46 – OS GRÁFICOS ILUSTRAM AS DIVERSAS POSSIBILIDADES DO TEOREMA 5.1.1



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Encontre os extremos relativos de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.

Resolução:

Para encontrarmos os pontos críticos devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Então

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$(x + 2)(3x - 2) = 0$$

Assim, $x = -2$ e $x = \frac{2}{3}$ são pontos críticos de f.

Como mostramos na tabela a seguir, podemos concluir pelo teste da derivada primeira que f tem um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = \frac{2}{3}$.

Intervalo	(x + 2)(3x - 2)	f' (x)	Conclusão
$x \leq -2$	(-)(-)	+	f é crescente
$x = -2$	0	0	f tem um máximo relativo em (-2, 10)
$-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$	(+)(-)	-	f é decrescente
$x = \frac{2}{3}$	0	0	f tem um mínimo relativo em $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{27}\right)$
$x \geq \frac{2}{3}$	(+)(+)	+	f é crescente

Para definir os sinais na segunda e terceira coluna foram utilizados valores para x de acordo com seus respectivos intervalos. No intervalo $x \leq -2$, tome $x = -4$ e calculamos:

$$f(-4) = (-4 + 2[3(-8) - 2] = (-2)(-22) = 44 > 0$$

3 TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Teorema 2.5.2 (Teste da derivada segunda). Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto crítico x_0.

(i) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.

(ii) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.

(iii) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo ou nenhum dos dois em x_0.

Exemplo 1:

Encontre os máximos e os mínimos relativos de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$ aplicando o critério da derivada segunda.

Resolução:

Para encontrarmos os pontos críticos devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Então

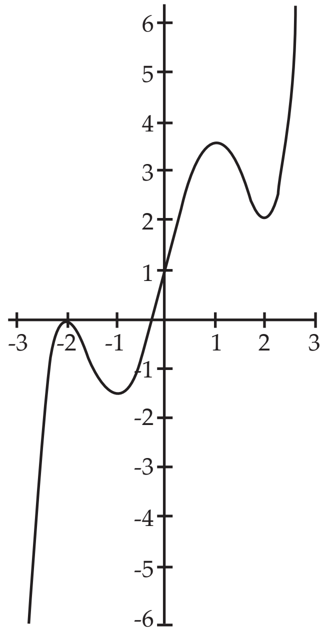
$f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
$(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 0$
Assim, $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$ são pontos críticos de f.

Aplicamos o Teorema 2.5.2 para verificar se f tem um extremo relativo nestes pontos críticos. Temos $f''(x) = 4x^3 - 10x$.

Como $f''(-2) = 4(-2)^3 - 10(-2) = -12 < 0$, f tem um máximo relativo em $x = -2$.
Como $f''(-1) = 4(-1)^3 - 10(-1) = 6 > 0$, f tem um mínimo relativo em $x = x = -1$.
Como $f''(1) = 4(1)^3 - 10(1) = -6 < 0$, f tem um máximo relativo em $x = 1$.
Como $f''(2) = 4(2)^3 - 10(2) = 12 > 0$, f tem um mínimo relativo em $x = 2$.

No gráfico da função (figura a seguir) podemos observar os pontos extremos da função.

FIGURA 47 – GRÁFICO DA FUNÇÃO 5.2

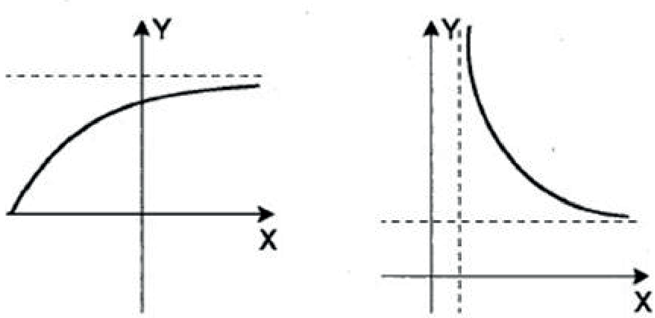


FONTE: O autor

4 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Considere uma função do tipo $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$. O gráfico de uma função desta se aproxima de uma reta à medida que x cresce ou decresce (ver figura a seguir). Estas retas são chamadas *assíntotas*.

FIGURA 48 – GRÁFICO 5.3



FONTE: O autor

Definição 2.5.1 A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

Exemplo 1:

Verifique que a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$.

Resolução:

Para verificar esta assíntota, aplicamos a Definição 2.5.1. Assim, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$ e também $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$.

Portanto, está verificado que a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$.

Definição 2.5.2 A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Exemplo 2:

Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$.

Resolução:

Para encontrar uma assíntota vertical aplicamos a Definição 2.5.1. Assim

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$, implicando na reta $x = 1$ em uma assíntota vertical e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$, implicando na reta $x = 2$ em uma assíntota vertical.

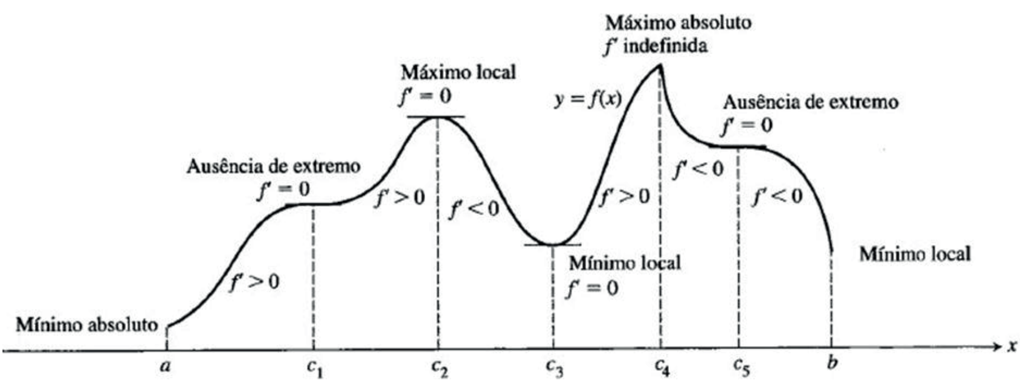
E agora, para encontrar uma assíntota horizontal, aplicamos a Definição 5.3.2. Assim $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2} = 0$, implicando na reta y = 0 em uma assíntota horizontal.

5 ESBOÇO DO GRÁFICO

Nosso objetivo nesta seção não é fazer gráficos milimetricamente exatos, plotando inúmeros pontos, mas sim aplicarmos os critérios estudados nas seções anteriores para determinar os extremos de uma função, os intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos de concavidade, os pontos de inflexão e outros elementos que constituem ferramentas importantes que auxiliam no esboço do gráfico, como veremos nos exemplos a seguir.

A figura a seguir apresenta alguns pontos de destaque no gráfico de funções.

FIGURA 49 – MOSTRA OS PONTOS EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO



FONTE: O autor

Exemplo 1:

Esboce a curva da função $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.

Resolução:

Vamos fazer um estudo detalhado sobre o que foi estudado.

Iniciamos com o estudo do domínio da função. Como f é uma função polinomial, seu domínio é o conjunto dos reais $D(f) = IR$.

O intercepto y (ponto de interseção da curva com o eixo (y) é 3, ou seja, (0, 3).

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$
$f''(x) = -6x + 12.$

Aplicando o Teorema 2.5.2 e equacionando $f'(x) = 0$, temos:

$-3(x^2 - 4x + 3) = 0$
$-3(x - 1)(x - 3) = 0$
obtendo-se $x = 1$ e $x = 3$.

Fazendo $f''(x) = 0$, temos $-6x + 12 = 0$, e daí $x = 2$.

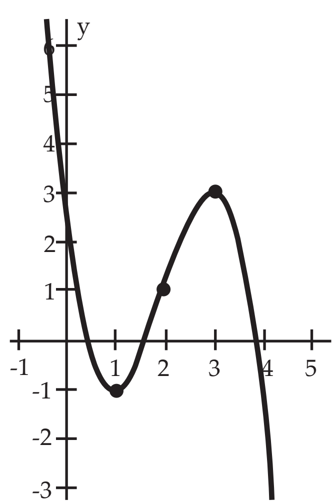
Faremos uma tabela com base nestes três valores: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ bem como nos intervalos entre esses valores. Aplicaremos os vários teoremas vistos para tirar as conclusões na tabela.

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusão**
$x < 1$	-	+	f é decrescente e o gráfico é côncavo para cima
$x - 1$	0	+	f tem um mínimo relativo em (1, -1)
$1 < x < 2$	+	+	f é crescente e o gráfico é côncavo para cima
$x - 2$	0	0	f tem um ponto de inflexão em (2, 1)
$2 < x < 3$	+	-	f é crescente e o gráfico é côncavo para baixo
$x = 3$	0	-	f tem um máximo relativo em (3, 3)
$x > 3$	-	-	f é decrescente e o gráfico é côncavo para baixo

Como f é uma função polinomial, não existem assíntotas.

Logo, temos na figura a seguir o esboço do gráfico.

FIGURA 50 – GRÁFICO 5.5



FONTE: O autor

Exemplo 2:

Esboce a curva da função $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Resolução:

Iniciamos com o estudo do domínio da função *f*.

Esta é uma função racional e seu denominador é um polinômio que é positivo para qualquer valor de *x*. Assim, o domínio é o conjunto dos reais *D*(*f*) = *IR*.

O fato da função ser formada por expressões em *x* dadas por x^2 sugere que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo *y*, situação que é confirmada, fazendo $f(-x) = f(x)$, $\forall\ x$.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+4\right)-x^2.2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{2x^3+8x-2x^3}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{8x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{8x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{8.\left(x^2+4\right)^2-8x.4x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{-24x^2+32}{\left(x^2+4\right)^3}$$

Aplicando o Teorema 2.5.2 e equacionando $f'(x) = 0$, temos $x = 0$ como ponto crítico, e fazendo $f''(x) = 0$, temos $x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Faremos uma tabela com base nestes três valores: $x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$, $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Aplicaremos vários teoremas para tirar as conclusões na tabela.

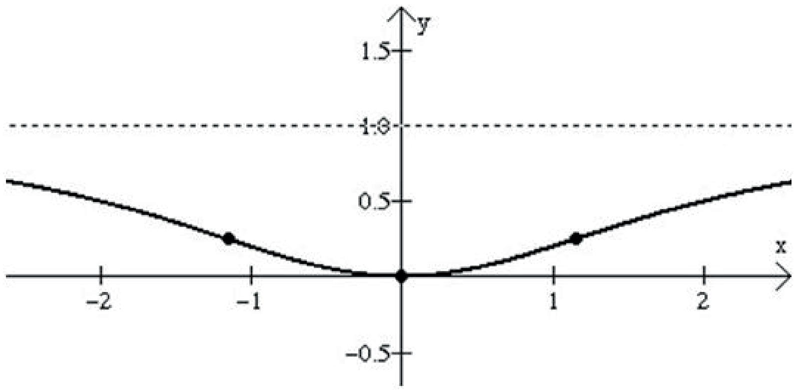
Intervalo	f′(x)	f′′(x)	Conclusão
$x<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	-	-	*f* é decrescente e o gráfico é côncavo para baixo
$x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	0	0	*f* tem um ponto de inflexão em $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$
$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<x<0$	-	+	*f* é decrescente e o gráfico é côncavo para cima
x = 0	0	+	*f* tem um mínimo relativo em (0, 0)
$0<x<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	+	+	*f* é crescente e o gráfico é côncavo para cima
$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	0	0	*f* tem um ponto de inflexão em $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$
$x>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	+	-	*f* é crescente e o gráfico é côncavo para baixo

Como o domínio são todos os reais, não existem assíntotas verticais.

Por outro lado, como $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+4} = 1$, segue que $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico.

Assim, com todas estas informações, traçamos o gráfico da função (figura a seguir).

FIGURA 51 – GRÁFICO DA FUNÇÃO 5.6



FONTE: O autor

Exemplo 3:

Esboce a curva da função $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

Resolução:

O domínio da função é $D(f) = IR$, pois f é uma função polinomial.

O intercepto y é -1, ou seja, (0, -1).

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$
$f''(x) = 12x^2 - 12x$

Aplicando o Teorema 2.4.2 e equacionando $f'(x) = 0$, temos $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$ pontos críticos fazendo agora $f''(x) = 0$, temos $x = 0$ e $x = 1$.

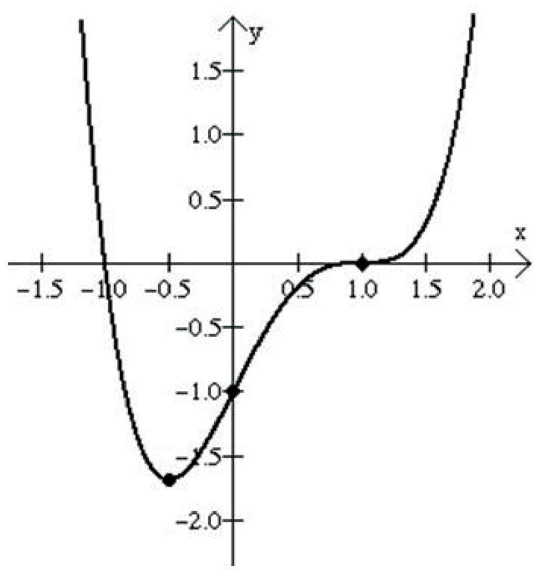
Faremos uma tabela com base nestes três valores: $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $x = 1$. Aplicaremos vários teoremas para tirar as conclusões na tabela.

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{1}{2}$	-	+	f é decrescente e o gráfico tem concavidade voltada para cima
$x = -\frac{1}{2}$	0	+	f tem um mínimo relativo em $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$
$-\frac{1}{2} < x < 0$	+	+	f é crescente e o gráfico tem concavidade voltada para cima
$x = 0$	0	0	f tem um ponto de inflexão em (0, -1)
$0 < x < 1$	+	-	f é crescente e o gráfico tem concavidade voltada para baixo
$x = 1$	0	0	f tem um ponto de inflexão em (1, 0)
$x > 1$	+	+	f é crescente e o gráfico tem concavidade voltada para cima

As assíntotas não existem, pois f é uma função polinomial.

Logo, temos na figura a seguir o esboço do gráfico.

FIGURA 52 – GRÁFICO 5.7



FONTE: O autor

RESUMO DO TÓPICO 5

Neste tópico vimos testes envolvendo as derivadas assíntotas e o esboço do gráfico.

- Os testes da primeira e segunda derivada são usados para classificar os pontos críticos de f em máximo relativo ou mínimo relativo.

- Ainda vimos que uma função pode ter assíntotas horizontais e/ou verticais e, para isto, calculamos os limites infinitos e no infinito, já estudados no Tópico 3 da Unidade 1.

- O esboço do gráfico reúne tudo o que estudamos nestes dois últimos tópicos.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

Nos exercícios 1 e 2, identifique os pontos extremos das funções.

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2) $f(x) = 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2$

Nos exercícios 3 e 4, dê as equações das assíntotas verticais e horizontais das funções.

3) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

Nos exercícios de 5 a 7, esboce o gráfico das funções.

5) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 5$

6) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

7) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

UNIDADE 2

TÓPICO 6

APLICAÇÕES DA DERIVADA

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção vamos discutir um resultado chamado *Teorema do Valor Médio*. Enunciado pela primeira vez pelo matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), este teorema tem muitas consequências importantes, tanto que é considerado um dos grandes princípios do Cálculo. Para entendê-lo melhor, precisamos primeiro enunciar o seguinte teorema.

2 TEOREMAS

2.1 TEOREMA DE ROLLE

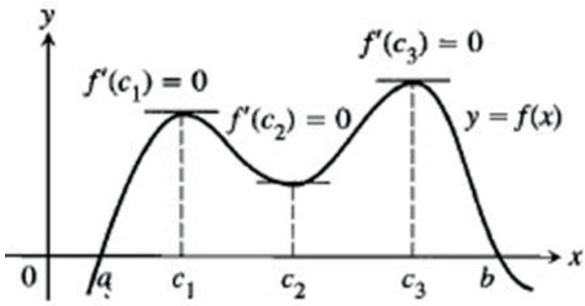
Teorema 2.6.1 Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

NOTA

O Teorema de Rolle tem uma interpretação geométrica simples. Como já foi estudado no Tópico 1 desta unidade, a derivada de uma função num ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se $f'(x_0) = 0$, isso significa que a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo x.

O Teorema 2.6.1. (de Rolle) diz que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva intercepta o eixo x. Em particular, na figura a seguir, essa curva tem três retas horizontais.

FIGURA 53 - CURVA TEM TRÊS RETAS HORIZONTAIS



FONTE: O autor

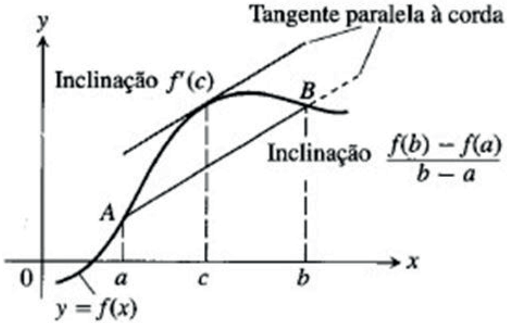
O matemático francês Michel Rolle (1652-1719) foi um autodidata em Matemática. Em 1691, apresentou o teorema que leva seu nome. Para complementar a leitura sobre este matemático, sugerimos a leitura em ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo. v 1. Porto Alegre: Bookman, 2007, p. 329.

2.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Teorema 2.6.2 Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe pelo menos um número real c no intervalo (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

O Teorema 2.6.2 (Teorema do Valor Médio – TVM) afirma que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$, conforme a figura a seguir.

FIGURA 54 – TANGENTE PARALELA À CORDA



FONTE: O autor

O Teorema do Valor Médio tem uma interpretação física que é a seguinte: quando $x = f(t)$ é a curva posição em relação ao tempo para um carro movendo-se ao longo de uma estrada reta, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a velocidade média do carro no intervalo de tempo a ≤ t ≤ b, enquanto que f'(c) é a velocidade instantânea em t = c. Assim, o Teorema do Valor Médio estabelece que, pelo menos uma vez durante o intervalo de tempo, a velocidade instantânea será igual à velocidade média. Por exemplo, se a velocidade média de um automóvel em um dado percurso for de 95 km/h, então, em algum momento, o velocímetro marcou 95 km/h.

Exemplo 1:

Determinar o ponto ***c*** através do Teorema do Valor Médio, para o caso de $f(x) = x^2 + 5x$, com $1 \leq x \leq 3$.

Resolução:

Temos $a = 1$ e $b = 3$.

$F(a) = f(1) = 1 + 5 = 6$ $\quad f(b) = f(3) = 9 + 15 = 24$

$f'(x) = 2x + 5$ $\quad f'(c) = 2c + 5$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ então}$$

$$2c + 5 = \frac{24-6}{3-1}$$

$$2c + 5 = 9$$

Portanto, $c = 2$.

Exemplo 2:

Um automóvel percorre 4 km de uma estrada reta em 5 minutos. Prove que o velocímetro mostra, pelo menos uma vez durante o percurso, exatamente 48 km/h.

Resolução:

O automóvel percorreu 4 km em 5 minutos $\left(= \frac{1}{12}\text{h}\right)$. Vamos calcular a sua velocidade média.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$Vm = \frac{4}{\frac{1}{12}} = 48 \text{ km/h.}$$

O Teorema do Valor Médio garante que, pelo menos uma vez ao longo dos 4 km, o automóvel esteve a 48 km/h.

3 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

Para resolver problemas que envolvem máximos ou mínimos, vamos ter que lidar com mais de uma variável, e o primeiro passo será identificar qual destas variáveis deve ser maximizada ou minimizada. Tal variável deverá ser expressa como função de uma única variável independente para que possamos aplicar o que estudamos sobre máximos e mínimos.

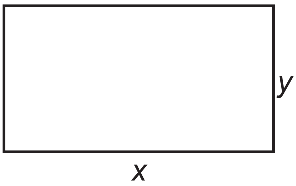
O procedimento descrito acima é chamado de otimização. Otimizar alguma coisa significa maximizar ou minimizar alguns de seus aspectos.

Exemplo 1:

Deseja-se construir uma caixa de forma retangular. A caixa que será construída tem 80 cm de perímetro. Calcule as dimensões dessa caixa para que ela tenha a maior área possível.

Resolução:

Vamos definir as variáveis do problema.
x: comprimento do retângulo (cm)
y: largura do retângulo (cm)
A: área do retângulo (cm^2)
Assim, a área do retângulo é dada por $A = x \cdot y$.
Como o perímetro do retângulo é de 80 cm, temos
$2x + 2y = 80 \Rightarrow y = 40 - x$.



Fazendo substituição nas sentenças da área com a do perímetro, obtemos:
$A(x) = x(40 - x)$
$A(x) = 40x - x^2$.

Como representa um comprimento, x não pode ser negativo como com o perímetro de 80 cm, segue que $0 \leq x \leq 40$.

Para encontrar a área máxima temos que encontrar o ponto de máximo relativo da função área. Para isso temos que fazer: $A' = 0$ e ter $A''(x) < 0$.
$A'(x) = 40 - 2x$
$40 - 2x = 0$
$X = 20$.
$A''(x) = -2$. Assim,
$A''(20) = -2$.

Então, a partir de $x = 20$, encontamos o valor de y (largura) substituindo em $y = 40 - x$. Daí, $y = 20$.

Portanto, para que a caixa tenha área máxima, devemos ter $x = 20$ e $y = 20$. Resulta um quadrado, é um caso particular do retângulo.

Apresentamos agora, de acordo com Finney, Weir e Giordano (2002, p. 275), uma estratégia para facilitar a resolução dos problemas.

Estratégia para Resolver Problemas de Máximo e Mínimo

> **Passo 1** *Compreendendo o Problema.* Leia o problema atentamente. Identifique as informações necessárias para resolvê-lo. O que é desconhecido? O que é dado? O que é pedido?
> **Passo 2** *Desenvolva um Modelo Matemático para o Problema.* Desenhe figuras e indique as partes que são importantes para o problema. Introduza uma variável para representar a quantidade a ser maximizada ou minimizada. Utilizando essa variável, escreva uma função cujo valor extremo forneça a informação pedida.
> **Passo 3** *Determine o Domínio da Função.* Determine quais valores da variável têm sentido no problema. Se possível, esboce o gráfico da função.
> **Passo 4** *Identifique os Pontos Críticos e as Extremidades.* Determine onde a derivada é zero ou não existe. Utilize aquilo que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função e sobre a física do problema. Use a primeira e a segunda derivada para identificar e classificar os pontos críticos (onde $f' = 0$ ou não existe).
> **Passo 5** *Resolva o Modelo Matemático.* Se não estiver seguro sobre o resultado, utilize outro método para embasar ou confirmar sua solução.
> **Passo 6** *Interprete a Solução.* Traduza seu resultado matemático de volta para a linguagem original do problema e decida se o resultado tem sentido ou não.

Exemplo 2:

Um fabricante de latas cilíndricas de conservas recebe um pedido muito grande de latas com volume de 600 ml. Quais as dimensões que minimizarão a área total da superfície de uma lata como esta e, portanto, a quantidade de metal necessário para fabricá-la?

Resolução:

Vamos resolver este problema identificando os passos da estratégia sugerida acima.

Passo 1 - *Compreendendo o Problema.*

Sendo r e h o raio da base e a altura de uma lata cilíndrica (figura a seguir), seu volume é

$$V = \pi.r^2.h$$

$$\pi.r^2.h = 600$$

e a área da superfície total é $A = 2\pi.r^2 + 2\pi.r.h$.

FIGURA 55 – O RAIO DA BASE E A ALTURA DE UMA LATA CILÍNDRICA

FONTE: O autor

Interpretemos a sentença: "quais as dimensões que minimizarão a área total da superfície". Procuramos as dimensões r e h que permitem que a área da superfície total seja a menor possível e, ainda assim, satisfaça a exigência de que o volume seja de 600 ml.

Passo 2 - *Desenvolva um Modelo Matemático para o Problema.*

Devemos minimizar A, que é uma função de duas variáveis, notando que a equação do volume relaciona essas variáveis. Logo, isolamos a altura h, obtendo:

$$h = \frac{600}{\pi . r^2}$$

e substituímos na fórmula da área total para expressar A como função só de r,

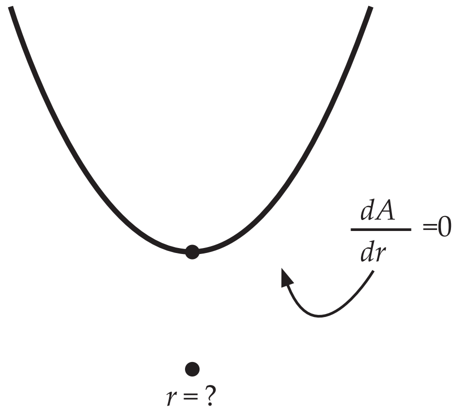
$$A(r) = 2\pi . r^2 + 2\pi . r . \frac{600}{\pi . r^2}$$

$$A(r) = 2\pi . r^2 + \frac{1200}{r}$$

Passo 3 - *Determine o Domínio da Função.*

O gráfico dessa função (figura a seguir) mostra que A é grande quando r é pequeno ou grande, com um mínimo em algum ponto intermediário, sendo r > 0.

FIGURA 56 – GRÁFICO DA FUNÇÃO 6.4



FONTE: O autor

Passo 4 - *Identifique os Pontos Críticos e as Extremidades.*

Como sabemos, para descobrir a localização precisa desse mínimo, derivamos a função da área, igualamos a derivada a zero e resolvemos,

$$\frac{dA}{dr}=4\pi.r-\frac{1200}{r^2}$$

$$4\pi.r-\frac{1200}{r^2}=0$$

$$4\pi.r^3=1200$$

$$\pi.r^3=300$$

Passo 5 - *Resolva o Modelo Matemático.*

As dimensões reais da lata em questão podem ser obtidas ao resolvermos a última equação. Assim,

$$r=\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \text{ ou } r\cong 4{,}57$$

Utilizemos esse valor para calcular *h:*

$$h=\frac{600}{\pi.r^2}=\frac{600}{\pi}.\left(\frac{\pi}{300}\right)^{2/3}$$

$h = 2\sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}$ ou $h \cong 9{,}14$.

Note que h = 2r.

Passo 6 - *Interprete a Solução.*

Do ponto de vista de diminuir os custos da matéria-prima, esse resultado revela que para uma lata cilíndrica de 600 ml, a altura deve ser igual ao diâmetro da base, com r ≅ 4,57 cm e r ≅ 9,14 cm.

Exemplo 3:

Considere a função custo total $f(x) = 20 + 2x + 0{,}05x^2$, onde $f(x)$ denota o custo total e x a quantidade produzida. Quantas unidades deverão ser fabricadas para que o custo médio seja o menor possível?

Resolução:

O custo médio é calculado por $c_m = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$.

Para encontrar o menor custo médio possível, temos que encontrar o ponto de mínimo relativo da função custo médio

$$C^m(X) = \frac{20 + 2x + 0{,}05x^2}{x}$$

$$C^m(X) = \frac{20}{x} + 2 + 0{,}05x$$

O domínio da função custo médio é $x > 0$, já que x representa a quantidade produzida.

Temos que derivar f mas, antes, vamos reescrever a função, de uma maneira apropriada para facilitar a derivação

$$c_m = 20x^{-1} + 2 + 0{,}05x$$

$$c'_m = -20x^{-2} + 0{,}05 \text{ ou } c'_m = \frac{-20}{x^2} + 0{,}05$$

$$c''_m = 40x^{-3} \text{ ou } c''_m = \frac{40}{x^3}$$

Para isso temos que fazer $c'_m(x) = 0$ e ter $c''_m(x) > 0$

$$-\frac{20}{x^2} + 0{,}05 = 0$$

$$0{,}05 = \frac{20}{x^2}$$

$$x^2 = 400$$

$$x = -20 \text{ ou } x = 20.$$

Pelo domínio, o único valor a ser combinado é $x = 20$. Verificamos se $c_m''(x) > 0$

$$c_m''(20) = \frac{40}{20^3}$$

$$c_m''(20) = \frac{40}{8000} = 0{,}005$$ (então 20 é ponto de mínimo relativo, pois $c_m''(x) > 0$)

Portanto, devem ser fabricadas 20 unidades para que o custo médio seja o menor possível.

4 REGRAS DE L'HOSPITAL

Estudaremos algumas regras para o cálculo de limites indeterminados. Estas regras baseiam-se no cálculo da derivada e são chamadas de regras de L'hospital, em homenagem ao matemático francês Guillaume François de L'Hospital (1661-1707).

Teorema 2.6.3 (Regra de L'Hospital para a indeterminação 0/0) Sejam f e g funções deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, com $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$, ou se esse limite é $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Caro(a) acadêmico(a), talvez você já tenha consultado algum material de Cálculo e observou esta regra com "outro" nome: L'Hôpital. Isto é uma curiosidade, se consultar diversos autores, alguns apresentam L'Hospital enquanto que outros L'Hôpital. Sugiro que pesquise um pouco mais sobre este matemático francês e sobre esta curiosidade em seu nome.

Exemplo 1:

Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Resolução:

O numerador e o denominador têm um limite zero. Portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0. Aplicando o Teorema 2.6.3, obtemos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x}{1} = -2 .$$

Exemplo 2:

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{3x}$.

Resolução:

O numerador e o denominador têm um limite zero. Portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0. Aplicando o Teorema 2.6.3, obtemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3} .$$

Exemplo 3:

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$.

Resolução:

A indeterminação deste limite é do tipo 1^{∞}. Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo 0/0 com o auxílio de logaritmos (ln).

Seja $L = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$. Então $\ell n\, L = \ell n \left[\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \right]$ daí

$$\ell n\, L = \lim_{x \to 0} \ell n\, (1 + x)^{1/x}$$

$$\ell n\, L = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ell n\, (1 + x)$$

$$\ell n\, L = \lim_{x \to 0} \frac{\ell n\, (1 + x)}{x}$$

Agora, o limite está pronto para aplicarmos o Teorema 2.6.3:

$$\ell n\, L = \lim_{x \to 0} \frac{\ell n\, (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1}$$

$$\ell n\, L = 1$$

Como $\ln L = 1$, temos $L = e$ e assim,

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e .$$

Teorema 2.6.4 (Regra de L'Hospital para a indeterminação ∞/∞) Sejam f e g funções deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, com $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$, ou se esse limite é $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Exemplo 4:

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{e^x}$.

Resolução:

O numerador e o denominador têm um limite $+\infty$. Portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Aplicando o Teorema 2.6.4, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{e^x} = 0 .$$

Exemplo 5:

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{\sqrt[3]{x}}$.

Resolução:

O numerador e o denominador têm um limite $+\infty$. Portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Aplicando o Teorema 2.6.4, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-2/3}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^{2/3}}{x}$$

Calculando o limite acima, a ideterminação do tipo ∞/∞ continua, aplicamos novamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n\,x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{-1/3}}{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n\,x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^{1/3}}=0$$

Exemplo 6:

Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen }x}-\frac{1}{4x}\right)$.

Resolução:

Os dois termos têm limite $+\infty$. Portanto, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\infty-\infty$. Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo 0/0 fazendo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen }x}-\frac{1}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4x-\text{sen }x}{4x\,\text{sen }x}$$

Agora, o limite está pronto para aplicarmos o Teorema 2.6.3:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen }x}-\frac{1}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4-\cos x}{4\,\text{sen }x+4x\cos x}$$

Calculando o limite acima, a ideterminação do tipo 0/0 continua, aplicamos novamente a regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen }x}-\frac{1}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{8\cos x-4x\,\text{sen }x}=\frac{0}{8}=0.$$

LEITURA COMPLEMENTAR

2.1 O QUE É CÁLCULO? O PROBLEMA DAS TANGENTES

Começamos nosso estudo de CáIculo com uma breve apreciação sobre seu conteúdo e as razões de sua importância. Uma vista geral do percurso que esta à frente pode ajudar-nos a atingir uma clareza de propósito e senso de direção que nos serão muito úteis no meio dos muitos detalhes técnicos que constituem a parte principal de nosso trabalho.

O CáIculo é usualmente dividido em duas partes principais - *cálculo diferencial* e *cálculo integral* -, sendo que cada uma tem sua própria terminologia não familiar, notação enigmática e métodos computacionais especializados. Acostumar-se a tudo isto exige tempo e prática, processo semelhante ao de aprender uma nova língua. Entretanto, esse fato não deve nos impedir de ver no início que os problemas centrais do assunto são realmente muito simples e claros, sem nada de estranho ou misterioso acerca deles.

Quase todas as ideias e aplicações do Cálculo giram em tomo de dois problemas geométricos que são muito fáceis de ser entendidos. Ambos se referem ao gráfico de uma função $y = f(x)$. Evitamos complicações assumindo que esse gráfico está inteiramente acima do eixo x, como na Fig. 2.1.

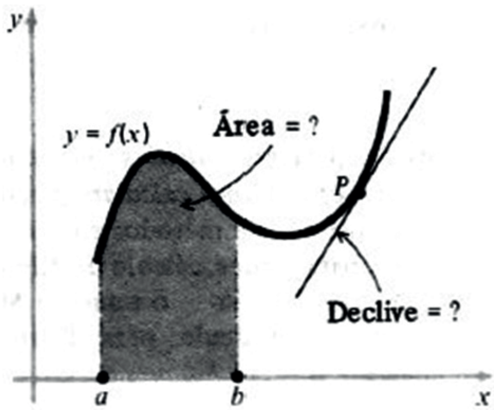


Figura 2.1 A essência do Cálculo.

PROBLEMA 1 O problema básico do cálculo diferencial é *o problema das tangentes:* calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P.

PROBLEMA 2 O problema básico do cálculo integral é *o problema das áreas:* calcular a área debaixo do gráfico, entre os pontos $x = a$ e $x = b$.

O que faremos em seguida estará sempre relacionado com esses dois problemas, as ideias e técnicas desenvolvidas para resolvê-los e as aplicações originadas deles*.

* Para os leitores interessados nas origens das palavras, *calculus,* na Roma Antiga, era uma pequena pedra ou seixo utilizado para contagem e jogo, e o verbo latino *calculare* passou a significar "figurar", "computar", "calcular". Hoje Cálculo é um método ou sistema de métodos para resolver problemas quantitativos de uma natureza particular, como no cálculo de probabilidades, cálculo de diferenças finitas, cálculo tensorial, cálculo das variações, cálculo de resíduos etc. Nosso Cálculo - o ramo da Matemática que compreende o cálculo diferencial e integral - é às vezes chamado o Cálculo, para distingui-lo de todos esses outros cálculos subordinados.

À primeira vista, esses problemas parecem de alcance bem limitado. Esperamos que eles lancem luz, de modo significativo, sobre a Geometria - e eles o farão. O que é muito surpreendente é constatar que eles têm também muitas aplicações profundas e de longo alcance em várias ciências. O Cálculo adquire importância no grande mundo fora da Matemática por meio dessas aplicações científicas, e um de nossos principais objetivos é introduzir o estudante a uma variedade delas tão grande quanto possível. Ao mesmo tempo, continuaremos a enfatizar a Geometria e as aplicações geométricas, pois este é o contexto em que as ideias do Cálculo são mais facilmente compreendidas.

Às vezes é dito que o Cálculo foi "inventado" por aqueles dois grandes gênios do século XVII, Newton e Leibniz**. Na verdade, o Cálculo é o produto de um longo processo evolutivo que começou na Grécia Antiga e continuou no século XIX. Newton e Leibniz foram homens verdadeiramente notáveis e suas contribuições foram de importância decisiva, mas o assunto nem começou nem terminou com eles.

Os problemas enunciados acima estavam presentes nas mentes de muitos cientistas europeus da metade do século XVII - mais notadamente em Fermat - e foi feito um progresso considerável em cada um deles, com engenhosos métodos especiais. A grande realização de Newton e Leibniz foi reconhecer e explorar a íntima conexão entre esses problemas, que ninguém tinha entendido completamente. Especificamente, eles foram os primeiros a entender o significado do *Teorema Fundamental do Cálculo,* o qual diz, com efeito, que a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área. Esse teorema – certamente o mais importante de toda a Matemática - foi descoberto por cada um deles, independentemente um do outro, e eles e seus sucessores usaram-no para unir as duas metades do assunto numa arte de resolução de problemas de poder e versatilidade impressionantes.

** É às vezes escrito Leibnitz (pronúncia latina) para sugerir a pronúncia correta.

Como essas observações sugerem, começamos nosso trabalho fazendo um estudo bastante completo do problema da tangente. Depois [...] voltamos ao problema da área. Daí, prosseguimos em várias direções, estendendo nossos conceitos e instrumentos básicos para classes mais amplas de funções com maior variedade de aplicações significativas.

Antes de tentar calcular o coeficiente angular de uma reta tangente, devemos primeiro decidir o que é uma reta tangente - e isto não é tão fácil quanto parece.

No caso de uma circunferência não há dificuldade. Uma tangente a uma circunferência (Fig. 2.2, à esquerda) é uma reta que intercepta a circunferência em apenas um ponto, chamado o ponto de tangência; as retas não-tangentes ou interceptam a circunferência em dois pontos diferentes ou não a interceptam.

Figura 2.2

Essa situação reflete a ideia intuitiva, que a maioria das pessoas tem de tangente a uma curva num dado ponto como sendo uma reta que "toca" a curva naquele ponto*. Ela sugere também a possibilidade de definir uma tangente a uma curva como uma reta que intercepta a curva em apenas um ponto. Essa definição foi usada com sucesso pelos gregos ao tratarem de circunferências e algumas outras curvas especiais, mas, para curvas em geral, ela é totalmente insatisfatória. Para compreender o porquê, considere a curva mostrada na Fig. 2.2 à direita. Ela tem uma tangente perfeitamente aceitável (a reta debaixo), que essa definição rejeitaria, é uma reta obviamente não-tangente (a reta de cima), que seria aceita.

* A palavra latina *tangere* significa "tocar".

O conceito moderno de reta tangente originou-se com Fermat, em torno de 1630. Como os estudantes poderão ver, esse conceito é não só um enunciado razoável acerca da natureza geométrica das tangentes, mas é também a chave de um processo prático para a construção de tangentes.

Resumidamente, a ideia é esta: considere uma curva $y = f(x)$ e P um dado ponto fixo sobre essa curva (Fig. 2.3). Considere Q um segundo ponto próximo de P sobre a curva e desenhe a reta secante PQ. A reta tangente em P pode agora ser encarada como a posição-limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção a P. Veremos na Seção 2.2 como essa ideia qualitativa leva, pelo menos, a um método quantitativo para o cálculo do coeficiente angular exato da tangente em termos da função $f(x)$ dada.

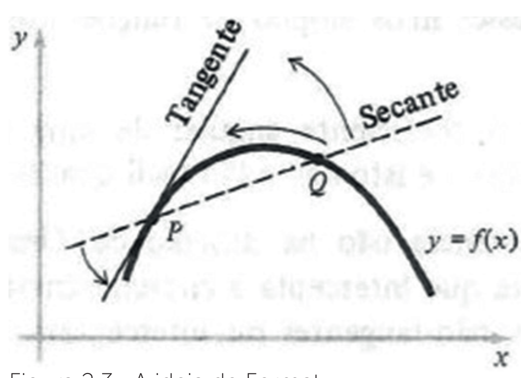


Figura 2.3 A ideia de Fermat.

Que não haja má compreensão. Essa maneira de pensar acerca de tangentes não é um ponto técnico de menor importância na geometria de curvas. Pelo contrário, é uma das três ou quatro ideias mais fecundas que qualquer matemático já tenha tido, pois, sem ela, não haveria o conceito de velocidade ou aceleração ou força em Física, nem dinâmica ou astronomia newtoniana, nem ciência física de qualquer natureza, exceto como mera descrição verbal de fenômenos, e certamente não teríamos a idade moderna da Engenharia e tecnologia.

FONTE: SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. p. 69-72. v. 1.

RESUMO DO TÓPICO 6

- Estudamos o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio, este último muito importante no Cálculo e tendo aplicações práticas.

- Resolvemos problemas de otimização, envolvendo máximos e mínimos de funções onde aplicamos os conceitos estudados nos Tópicos 4 e 5.

- Finalizando este tópico, resolvemos limites indeterminados aplicando a chamada Regra de L'Hospital. Esta regra facilita o processo de *"levantar"* a indeterminação dos limites, que foi estudado no Tópico 2 da Unidade 1.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo dos limites.

1) Verifique se as condições do Teorema do Valor Médio são satisfeitas pela função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ em $[-1, 2]$. Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema.

2) Um motorista está dirigindo em uma estrada reta com o limite de velocidade de 80 km/h. Às 08 horas e 05 minutos da manhã, um controlador cronometra a velocidade do carro como sendo 75 km/h e, 5 minutos depois, um segundo controlador, 10 km adiante na estrada, cronometra a velocidade do carro como sendo de 80 km/h. Explique por que o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade.

3) Suponha que a função $f(x) = 50 + \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{20000}$ forneça a quantidade aproximada de sacas de milho produzidas por hectare, num determinado terreno, ao se aplicar x gramas de adubo por metro quadrado, onde $0 \leq x \leq 150$. Determinar a quantidade de adubo a ser aplicada por metro quadrado para obtermos a maior produção possível.

4) Uma caixa d'água (sem tampa) deve ter o formato de um paralelepípedo reto retângulo, ter altura igual à largura e que a soma das áreas de suas paredes (incluindo o fundo) seja 6 m2. Determinar suas dimensões para que sua capacidade seja a maior possível.

5) Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

6) Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de R$ 200,00 por unidade. Se o custo total de produção (em reais) para x unidades for $c(x) = 500.000 + 80x + 0{,}003x^2$ e se a capacidade de produção da firma for de, no máximo, 30.000 unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?

Nos exercícios de 7 a 13, calcule os limites utilizando a regra de L'Hospital.

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 7x^3 + x + 5}{2x^3 + 4x^2 - 6x}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+x}{e^{3x}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-24x+32}{2x^3-9x^2+12x-4}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n\ x}{\sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x - 1}{x^3+4x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ x}{x^2}$

UNIDADE 3

INTEGRAÇÃO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- reconhecer os diferentes tipos de integrais;
- resolver as integrais através das técnicas de integração por substituição e integração por partes;
- calcular área entre curvas utilizando as integrais;
- calcular volume de sólidos de revolução;
- calcular valor médio de uma função;
- calcular integrais de funções racionais por frações parciais;
- calcular integrais impróprias.

PLANO DE ESTUDOS

Esta unidade está dividida em cinco tópicos, apresentando as principais técnicas de integração e aplicações de integrais definidas. Em cada tópico é apresentado o conceito, seguido de diversos exemplos para auxiliá-lo(a) na compreensão e resolução dos exercícios propostos.
Além disso, é apresentado um resumo do tópico e um texto complementar. Neste texto é dada ênfase à personalidade matemática de Gottfrield Wiheim von Leibniz, que contribuiu no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

TÓPICO 1 – INTRODUÇÃO À INTEGRAL

TÓPICO 2 – DEFININDO ÁREA COMO UM LIMITE

TÓPICO 3 – APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

TÓPICO 4 – MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO I

TÓPICO 5 – MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO II

Assista ao vídeo desta unidade.

INTRODUÇÃO À INTEGRAL

1 INTRODUÇÃO

Na Unidade 2 estudamos a derivação (cálculo diferencial), que, em termos geométricos, corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à curva. A derivada também é um método de cálculo para descrever como as funções variam em um dado momento. Esse fato levou os estudiosos a buscarem um método para descrever como essas variações instantâneas poderiam se acumular ao longo de um intervalo para produzir a função.

2 INTRODUÇÃO À INTEGRAL

Havia outro estudo, eles investigavam áreas sob curvas, uma pesquisa que desenvolveu o segundo ramo principal do cálculo, chamado cálculo integral.

Newton e Leibniz sabiam intuitivamente que existia uma ligação entre coeficientes angulares de retas tangentes e áreas entre curvas. A descoberta desta ligação (chamada de Teorema Fundamental do Cálculo) juntou o cálculo diferencial e integral, tornando-os a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já obtiveram para entender o universo.

3 INTEGRAL INDEFINIDA

Caros acadêmicos, iniciaremos o estudo de determinar uma função $f(x)$ a partir de um de seus valores conhecidos e sua derivada $f'(x)$.

Primeiro, precisamos encontrar uma fórmula que dê todas as funções que poderiam ter $f(x)$ como derivada. Essas funções são chamadas primitivas de $f(x)$, e a fórmula que fornece todas elas é chamada integral indefinida.

A integral indefinida consiste no processo inverso ao da derivação, chamado de antiderivação.

Para a derivada da função $F(x) = \frac{3}{2}x^2$, obtemos $F'(x) = f(x) = 3x$. Como a integração é o processo inverso da derivação, deve-se obter uma função *F(x)* tal que $F'(x) = 3x$. A função

$F(x) = \frac{3}{2} x^2$, é uma solução, mas existem outras, como: $F_1(x) = \frac{3}{2} x^2 + 4$ $(F_1'(x) = 3x = f(x))$.

Definição 3.1.1 Uma função *F(x)* é uma *primitiva* de uma função *f(x)* se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x no domínio de f.

Exemplo 1:

Encontre a função primitiva de $f(x) = 3x^5$.

Resolução:

$F(x) = \frac{x^6}{2}$ é uma primitiva da função $f(x) = 3x^5$.

Pois, $F'(x) = \frac{1}{2} . 6x^5 = 3x^5 = f(x)$, satisfaz a Definição 1.1.1.

Exemplo 2:

As funções $g(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ e $h(x) = \frac{1}{3}. (x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$.

Resolução:

Verificaremos a igualdade $F'(x) = f(x)$ da Definição 1.1.1. Assim,

$g'(x) = \frac{1}{3} . 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$ e

$h'(x) = \frac{1}{3} . (x^3 + 3)^0. 3x^2 = x^2 = f(x)$.

Teorema 3.1.1 Se $F(x)$ for qualquer primitiva de $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ então, para qualquer constante ***c***, a função $F(x) + c$ é também uma primitiva de $f(x)$ em $[a, b]$.

A constante ***c*** é chamada de *constante de integração*: ela é uma constante arbitrária, uma vez que a ela pode ser atribuído qualquer valor real.

Definição 3.1.2 O conjunto de todas as primitivas de $f(x)$ é a integral indefinida de f em relação a x, denotada por:

$\int f(x)\, dx$.

Representamos a integral pelo símbolo $\int$. A função $f(x)$ é o integrando de uma integral e dx indica a variável de integração.

A integral indefinida de uma função $\int f(x)dx = F(x) + c$ é na verdade uma família de funções: para cada valor atribuído à constante de integração ***c*** temos uma nova função que é solução da integral. Um membro específico da família é determinado atribuindo um valor particular à constante de integração.

Exemplo 3:

Calcule $\int \cos(4x)dx$.

Resolução:

$F(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos(4x)$.

Então, pelo Teorema 1.1.1 $\int \cos(4x)dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + c$.

Exemplo 4:

Calcule $\int 2x dx$ e faça o gráfico com várias primitivas da $f(x)$.

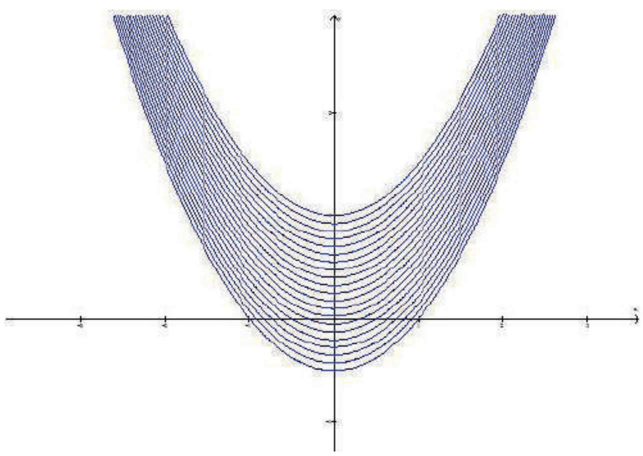
Resolução:

Como visto anteriormente, há várias primitivas para uma mesma função, que diferem entre si pelo valor da constante ***c*** (constante de integração).

Assim, $\int 2x dx = x^2 + c$.

Na figura a seguir mostramos o gráfico das curvas $y = x^2 + c$.

FIGURA 57 – O GRÁFICO DAS CURVAS $y = x^2 + c$



FONTE: O autor

UNI

Usamos o símbolo $\int f(x)dx$ para designar a integral indefinida. De acordo com esta notação, o símbolo $\int$ é chamado sinal de integração e a função f(x) integrando. O símbolo dx que aparece no integrando serve para identificar a variável sobre a qual integraremos.

4 PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Assim como os limites e as derivadas, as integrais obedecem às regras algébricas, conforme veremos a seguir.

1) Integral de uma função: $\int dx = x + c$.

2) Integral da multiplicação por uma constante: Sejam $f(x)$ uma função integrável e k uma constante real qualquer. Então, $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$.

Exemplo 1:

$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$.

3) Integral da soma: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis. Então,

$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Exemplo 2:

$$\int (x^2 + x + 4)dx = \int x^2dx + \int xdx + \int 4dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + c.$$

4) Integral da diferença: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis. Então,

$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Exemplo 3:

$$\int (x^4 - x^2)dx = \int x^4dx - \int x^2dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + c.$$

5 INTEGRAIS IMEDIATAS

A integração é o processo inverso da derivação. Assim como, na derivação, temos "regras" de integração para funções básicas.

TABELA DE INTEGRAIS IMEDIATAS

1) $\int du = u + c$

2) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \; n \neq -1$

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

4) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \; a > 0, \; a \neq 1$

5) $\int e^u du = e^u + c$

6) $\int \text{sen } u \, du = - \cos u + c$

7) $\int \cos u \, du = \text{sen } u + c$

8) $\int \sec^2 u \, du = \text{tg } u + c$

9) $\int \text{cossec}^2 u \, du = - \text{cotg } u + c$

10) $\int \sec u . \text{tg } u \, du = \sec u + c$

11) $\int \text{cossec } u . \text{contg } u \, du = - \text{cossec } u + c$

12) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \text{tg } u| + c$

13) $\int \text{cossec } u \, du = \ln|\text{cossec } u - \text{cotg } u| + c$

14) $\int \text{tg } u \, du = \ln|\sec u| + c$

15) $\int \text{cotg } u \, du = \ln|\text{sen } u| + c$

Exemplo 1:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c \, .$$

Exemplo 2:

$$\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx = 2\frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{2} + c.$$

Exemplo 3:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

Exemplo 4:

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2 + 1} + c = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

No caso da função potência f(x) = x -1 = $\frac{1}{x}$, a integral é especial, porque uma primitiva da função f(x) = x -1 é a função f(x) = ln|x| . Portanto, $\int \frac{1}{x} dx$ = ln|x| + c.

Exemplo 5:

Calcule $\int \left(6x^2 - 4 + 3\sqrt{x}\right) dx$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\int \left(6x^2 - 4 + 3\sqrt{x}\right) dx &= 6\int x^2\, dx - 4\int dx + 3\int x^{1/2} dx \\
&= 6\frac{x^3}{3} - 4x + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\
&= 2x^3 - 4x + 3.\frac{2x^{3/2}}{3} + c \\
&= 2x^3 - 4x + 2x^{3/2} + c
\end{aligned}$$

Exemplo 6:

Calcule $\int$ (sec x.tg + 7cossec$^2\,x$) dx

Resolução:

$$\int (\sec x.\text{tg} + 7\text{cossec}^2 x)\,dx = \int (\sec x.\text{tg}\,x)\,dx + 7\int \text{cossec}^2 x\,dx = \sec x - 7\text{cotg}\,x + c$$

Exemplo 7:

Calcule $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{5x}\right) dx$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{5x}\right) dx &= \int \sqrt[3]{x^2}\,dx - \int \frac{2}{5x}\,dx \\
&= \int x^{2/3}\,dx - \frac{2}{5}\int \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{2}{5}\ln|x| + c \\
&= \frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{2}{5}\ln|x| + c
\end{aligned}$$

6 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Algumas integrais são resolvidas aplicando uma das fórmulas básicas (integrais imediatas) depois de ser feita uma mudança de variável (substituição). O método da substituição é motivado pela regra da cadeia do ponto de vista da antidiferenciação. Assim, sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$ e suponhamos que g seja uma outra função diferenciável. Vamos derivar a função composta $F(g(x))$. Aplicando a regra da cadeia, escrevemos:

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \,.\, g'(x)$

Integrando a igualdade, temos

$\int F'(g(x)) \,.\, g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$

e, como temos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$,

$\int f'(g(x)) \,.\, g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$

Veja como se dá a substituição na integral em que a função integrante é uma derivada de uma função composta.

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$	*Substituir $u = g(x)$ e $du = g'(x)\, dx$*
$= F(u) + c$	*Encontrar a primitiva $F(u)$ de $f(u)$*
$= F(g(x)) + c$	*Voltar para a variável x*

O objetivo da técnica de integração é tornar a integral tão simples que a integral fique semelhante a uma das integrais da tabela de integrais imediatas.

UNI

Caro(a) acadêmico(a), por uma questão de organização nos exemplos que seguirão, nas suas resoluções a coluna da direita será reservada para mostrar as substituições feitas e as derivadas necessárias.

Exemplo 1:

Calcule a integral $\int (x^3 - 7)^{15}\, 3x^2\, dx$

Resolução: Perceba que a escolha da função *u* é fundamental para o sucesso da resolução da integral. Também deve ser observado que a função *u* deverá ser derivada e, neste caso, tratando-se de funções polinomiais, a função *u* deve ser a função de maior grau. Já que, ao aplicar a regra de derivação da potência, a função diminui o grau, facilitando nossa integração.

Escolhendo como $u = x^3 - 7$ (possui maior grau), então $du = 3x^2\, dx$. Assim, escrevemos a integral como:

$\int \left(x^3 - 7\right)^{15} 3x^2\ dx = \int u^{15}\ du$	$u = x^3 - 7$
$= \dfrac{u^{16}}{16} + c$	$\dfrac{du}{dx} = 3x^2$
$= \dfrac{\left(x^3 - 7\right)^{16}}{16} + c$	$du = 3x^2\ dx$

UNI

Siga os seguintes passos para calcular a integral $\int f(g(x)).g'(x)\,dx$.

Passo 1: Faça uma escolha para u, isto é, $u = g(x)$. A escolha deve se basear no fato de que se quer facilitar a integração.

Passo 2: Calcule $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

Passo 3: Faça a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$. Depois de feita a substituição de variável, toda a integral deve estar em termos da variável u; nenhum x deve continuar aparecendo. Se isto não acontecer, deve-se tentar uma nova escolha para u.

Passo 4: Calcule a integral resultante, se possível. Neste momento, a integral resultante deve ser uma integral imediata.

Passo 5: Substituir u por $g(x)$; assim a resposta final estará em termos de x.

Exemplo 2:

Calcule a integral $\int \frac{10x^4}{3+2x^5}\,dx$.

Resolução:

Novamente, observe que temos duas funções polinomiais. E como já foi destacado anteriormente, devemos escolher como função *u* a de maior grau, pois derivando o grau diminui.

Fazendo a substituição de $3 + 2x^5$ por u na integral dada, temos $u = 3 + 2x^5$. Derivando u, temos $du = 10x^4\,dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\int \frac{10x^4}{3+2x^5}\,dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln\left|3+2x^5\right| + c$$

$$u = 3 + 2x^5$$
$$\frac{du}{dx} = 10x^4$$
$$du = 10x^4\,dx$$

Exemplo 3:

Calcule a integral $\int e^{5x}\,dx$

Resolução:

Nesta integral, o fato marcante é a presença do e, número de Euler. Pois, na tabela das integrais imediatas, temos a integral $\int e^u\,du = e^u + c$. Assim, comparando a integral com a tabela, observa-se que o u deve ser a função $5x$.

Fazendo a substituição de $5x$ por u na integral dada, temos $u = 5x$, implicando em $du = 5\,dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\begin{aligned}
\int e^{5x}\,dx &= \int e^u \frac{1}{5}\,du & \qquad u &= 5x \\
&= \frac{1}{5}\int e^u\,du & \qquad \frac{du}{dx} &= 5 \\
&= \frac{1}{5}e^u + c & \qquad du &= 5\,dx \\
&= \frac{1}{5}e^{5x} + c & \qquad \frac{du}{5} &= dx
\end{aligned}$$

AUTOATIVIDADE

Resolva as seguintes integrais e tente escrever uma generalização destas integrais, isto é, escreva uma "regra" para integrais desta forma.

1) $\int e^{2x}\,dx$

2) $\int e^{7x}\,dx$

3) $\int e^{8x}\,dx$

Exemplo 4:

Calcule a integral $\int 3x\sqrt{x^2+5}\,dx$.

Resolução:

Esta integral se assemelha à integral do exemplo 2.

Precisamos recordar como se escreve um radical na forma de potência: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Escolhendo como u = $x^2 + 5$, pois a sua derivada é uma função do 1º grau, conforme segue $du = 2x\,dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\int 3x\sqrt{x^2+5}\;dx = 3\int u^{1/2}\,\frac{1}{2}du \qquad u = x^2+5$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c \qquad du = 2x\,dx$$

$$= \left(x^2+5\right)^{3/2} + c \qquad \frac{du}{2} = x\,dx$$

Observe os quatro exemplos feitos anteriormente. Em todos existe uma coluna à direita mostrando a substituição na variável na integral por u e, em seguida, a diferenciação das variáveis. Em seu caderno, quando você for resolver os exercícios, procure seguir a mesma organização apresentada nos exemplos, pois isso ajudará você na próxima técnica também. Lembre-se de que um dos objetivos da matemática é o de desenvolver no estudante a organização. Portanto, seja organizado.

Exemplo 5:

Calcule a integral $\int 12x^2e^{x^3}\;dx$.

Resolução:

Podemos apontar dois motivos para escolher como $u = x^3$: primeiro pelo fato do grau ser maior (um grau a mais) que na outra função em x e o outro fato é a comparação com a integral $\int e^u\,du$ da tabela. Fazendo a substituição $u = x^3$, temos $du = 3x^2\,dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\int 12x^2e^{x^3}\;dx = 12\int e^u\,\frac{1}{3}du \qquad du = 3x^2\,dx$$

$$= 4e^u + c \qquad \frac{du}{3} = x^2\,dx$$

$$= 4e^{x^3} + c \qquad u = x^3$$

IMPORTANTE

No início deste item (método da integração por substituição) foi mostrado de onde decorre a integração por substituição [F(g(x))]´ = F´(g(x)) . g´(x). Assim, podemos fazer a verificação da integral resolvida, isto é, podemos verificar se a função encontrada na integral F(g(x)) + c corresponde à função primitiva da função integrante F´(g(x)) . g´(x).

Fazendo a verificação:

No exemplo 5, resolvido anteriormente, foi calculada a integral $\int 12x^2e^{x^3}\,dx$ e obteve-se como função primitiva a função $4e^{x^3}+c$. Então vamos fazer a verificação se essa função é, de fato, a função primitiva que procurávamos.

Devemos verificar a igualdade [F(g(x))]´ = F´(g(x)) . g´(x).

$$\left[4e^{x^3}+c\right]' = \left[4e^{x^3}\right]' + c' = 4.3x^2e^{x^3}+0 = 12x^2e^{x^3}$$

Veja que a igualdade foi verificada. Este é um recurso que você dispõe para comprovar que de fato você encontrou a função primitiva através da integral.

IMPORTANTE

O objetivo da técnica de integração por substituição é substituir a função em "x" (que tem grau maior) a fim de tornar esta integral tão simples como uma das integrais imediatas da tabela. Então, após a substituição devemos ter uma integral semelhante a uma das integrais imediatas.

Exemplo 6:

Calcule a integral $\int cos(4x)\,dx$.

Resolução:

Nesta integral, perceba a presença da função trigonométrica $\cos x$. Pois, na tabela das integrais imediatas, temos a integral $\int$ cos u du = sen u + c.

Assim, por comparação entre as integrais fazemos a substituição de $4x$ por u na integral dada, então $u = 4x$. Derivando u temos $du = 4\,dx$. Assim, escrevemos a integral como:

$$\int \cos(4x)\ dx = \int (\cos u)\frac{1}{4}\ du \qquad u = 4x$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\ \ du \qquad \frac{du}{dx} = 4$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + c \qquad du = 4\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + c \qquad \frac{du}{4} = dx$$

AUTOATIVIDADE

Resolva as seguintes integrais e tente escrever uma generalização destas integrais, isto é, escreva uma "regra" para integrais desta forma.

1) $\int$ cos (5x) dx
2) $\int$ cos (7x) dx
3) $\int$ sen (6x) dx
4) $\int$ sen (3x) dx

Exemplo 7:

Calcule a integral $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\ dx$.

Resolução:

Nesta integral, a princípio tanto faz a função que chamaremos de u . Mas devido à potência a função u deve ser a função trigonométrica sen x.

Escolhendo como $u = \operatorname{sen} x$, então $du = \cos x\ dx$. Assim, escrevemos a integral como:

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\ \ dx = \int u^4\ \ du \qquad u = \operatorname{sen} x$$

$$= \frac{u^5}{5} + c \qquad \frac{du}{dx} = \cos\ x$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c \qquad du = \cos x\ \ dx$$

Exemplo 8:

Calcule a integral $\int \frac{3x^2}{\left(9-2x^3\right)^7}\ dx$.

Resolução:

Observe que tanto o numerador quanto o denominador da integral são funções polinomiais. Portanto, devemos escolher como função u a função $9 - 2x^3$ do denominador, pois ela tem grau maior, e quando a derivamos, teremos uma função de grau menor para substituir. E para a resolução da integral temos que usar uma propriedade de potência: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Escolhendo como $u = 9 - 2x^3$, então $du = -6x^2\ dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\int \frac{3x^2}{\left(9-2x^3\right)^7}\ dx = \int \frac{1}{-2}\frac{du}{u^7} \qquad u = 9-2x^3$$

$$= \frac{1}{-2}\int u^{-7}\ du \qquad \frac{du}{dx} = -6x^2$$

$$= \frac{1}{(-2)}\frac{u^{-6}}{(-6)} + c \qquad du = -6x^2\ dx$$

$$= \frac{1}{12}u^{-6} + c \qquad \frac{du}{-2} = 3x^2\ dx$$

$$= \frac{1}{12}\left(9-2x^3\right)^{-6} + c$$

Exemplo 9:

Calcule a integral $\int \frac{x}{5+x}\ dx$.

Resolução:

Agora a situação é um pouco diferente das anteriores. Pois nas anteriores as funções polinomiais na integral possuíam graus diferentes e nesta as funções têm mesmo grau.

Escolhemos como $u = 5 + x$, então $du = dx$.

Mas se substituirmos na integral, obtemos

$\int \frac{x}{5+x}\ dx = \int \frac{x}{u} du$. Isto não pode ocorrer!

Ao trocarmos a variável, a integral tem que ter apenas a nova variável u. Então na igualdade em que propomos a substituição, devemos escrever a variável x em função de x e aí substituir na integral, deixando a integral toda na variável u.

Assim, escrevemos a integral como:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{5+x}\,dx &= \int \frac{u-5}{u}\,du\\ &= \int\left(\frac{u}{u}+\frac{5}{u}\right)du\\ &= \int\left(1+\frac{5}{u}\right)du\\ &= u+5\ln|u|+c\\ &= (5+x)+5\ln|5+x|+c\end{aligned}$$

$$u = 5+x \qquad \frac{du}{dx}=1 \qquad du = dx \qquad u-5 = x$$

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

Não caia na tentação! É comum o aluno cometer o seguinte erro na fração ☹ $\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}} = b$ esta simplificação só ocorre com o produto. Assim o correto é ☺ $\frac{\cancel{a}.b}{\cancel{a}} = b$.

Exemplo 10:

Calcule a integral $\int x(x+3)^9\,dx$.

Resolução:

Nesta integral, aplica-se um procedimento semelhante ao que foi apresentado anteriormente.

Escolhendo como $u = x + 3$, segue que $du = dx$. Assim, reescrevemos a integral como:

$$\begin{aligned}\int x(x+3)^9\,dx &= \int (u-3)u^9\,du\\ &= \int\left(u^{10}-3u^9\right)du\\ &= \frac{u^{11}}{11}-\frac{3u^{10}}{10}+c\\ &= \frac{(x+3)^{11}}{11}-\frac{3(x+3)^{10}}{10}+c\end{aligned}$$

$$u = x+3 \qquad \frac{du}{dx}=1 \qquad du = dx \qquad u-3 = x$$

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você viu que:

- Iniciamos o tópico mostrando que a *integração* é o processo inverso da *derivação*.

- As propriedades algébricas estudadas nos limites e nas derivadas são as mesmas empregadas nas integrais.

- Neste estudo inicial das integrais, aprendemos como calcular integrais imediatas utilizando a tabela de integração.

- Finalizamos o tópico com a técnica de integração por substituição ou mudança de variável. Esta técnica tem como finalidade tornar a integral mais simples, facilitando o cálculo. E ainda vimos que as integrais que são resolvidas por esta técnica têm suas primitivas como funções compostas. Vamos recordar as etapas do método.

- As integrais têm a seguinte forma:

$\int f(g(x)).\, g'(x)\, dx.$

Passo 1: A escolha para u, isto é, $u = g(x)$.

Passo 2: Calcule $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$.

Passo 3: Faça a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$.

Observe que toda a integral deve estar em termos da variável u; nenhum x deve continuar. Se isto não acontecer, deve-se tentar uma nova escolha para u.

Passo 4: Calcule a integral resultante, se possível.

Passo 5: Substituir u por $g(x)$; assim a resposta final estará em termos de x.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática a técnica de substituição que foi apresentada. Lembre-se das orientações dadas para cada tipo de integral desenvolvida.

Nas questões de 1 a 8, calcule as integrais indefinidas:

1) $\int \left(3x^3 - 2x^2 + 8x - 6\right)\, dx$

2) $\int \left(x^{-3} + x^2 - 5x\right)\, dx$

3) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\, dx$

4) $\int \left(3e^u + u^3\right)\, du$

5) $\int \left(x^2 + \frac{6}{x}\right)\, dx$

6) $\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2}\right)\, dx$

7) $\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx$

8) $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + 4x\right) dx$

Nos exercícios 9 a 12, calcule as integrais fazendo as substituições indicadas.

9) $\int 2x\left(x^2 + 1\right)^{23}\, dx;\; u = x^2 + 1$

10) $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}\, dx;\; u = 4x^2 + 5$

11) $\int e^{3x+7}\, dx;\; u = 3x + 7$

12) $\int x\sqrt{2x - 1}\, dx;\; u = 2x - 1$

Nos exercícios 13 a 20, calcule as integrais fazendo as substituições apropriadas.

13) $\int (1 + \operatorname{sen} x)^9 \cos x \; dx$

14) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$

15) $\int x\left(2 - x^2\right)^3 dx$

16) $\int x^2 e^{-2x^3} \; dx$

17) $\int x\sqrt{7x^2 + 12} \; dx$

18) $\int \dfrac{x}{\left(4x^2 + 1\right)^3} \; dx$

19) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \; dx$

20) $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

Assista ao vídeo de resolução da questão 15

DEFININDO ÁREA COMO UM LIMITE

1 INTRODUÇÃO

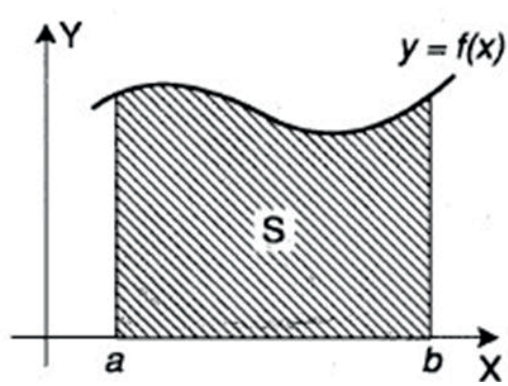
Os gregos da Antiguidade tinham grande conhecimento acerca de áreas de triângulos, círculos e configurações relacionadas, mas qualquer outra figura apresentava um novo e insolúvel problema. O primeiro avanço foi feito pelo matemático grego Arquimedes, que aplicava uma técnica denominada *método da exaustão* para calcular a área de regiões limitadas por parábolas, por espirais e por várias outras curvas.

2 O CONCEITO DE ÁREA

No século XVII, vários matemáticos utilizavam limites para obter áreas de figuras com contornos curvilíneos. Mas foram Newton e Leibniz que mostraram que, se uma quantidade pode ser calculada por exaustão, então pode também ser calculada muito mais facilmente com o uso de antiderivadas. Esse importante resultado é denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

O problema da área pode ser enunciado como: dada uma função f contínua e não-negativa em um intervalo [a, b], qual a área da região entre o gráfico de f e o intervalo [a, b] no eixo x (figura a seguir)?

FIGURA 58 – GRÁFICO 2.1



FONTE: O autor

3 INTEGRAL DEFINIDA

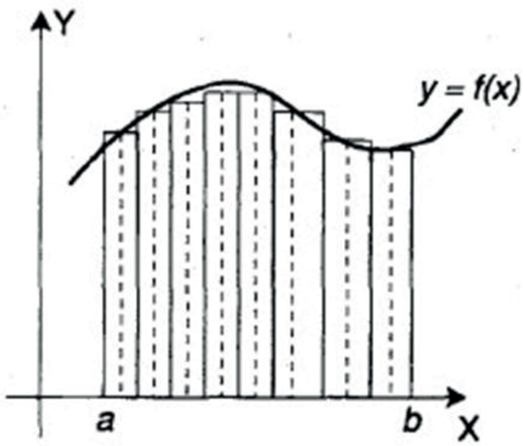
3.1 SOMA DE RIEMANN

Para resolver o problema da área, utilizaremos a *soma de Riemann*. Iniciamos dividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos e escolhendo n - 1 pontos: x_1, x_2, x_3,..., x_{n-1} entre a e b, sujeitos apenas à condição de que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ é chamado partição de [a, b].

FIGURA 59 – GRÁFICO 2.2



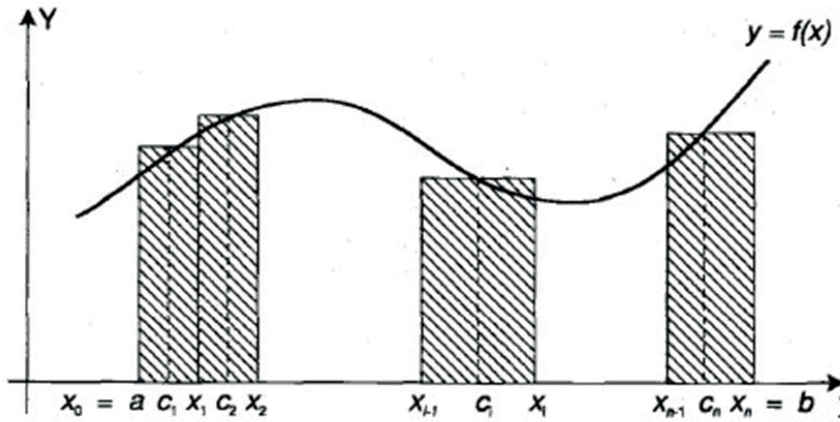
FONTE: O autor

A partição P define n subintervalos fechados:

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$, onde $[x_{i-1}, x_i]$ é o *i-ésimo subintervalo de P*, e seu comprimento é $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Em cada subintervalo selecionamos algum número c_i. Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$ (figura a seguir).

FIGURA 60 – GRÁFICO 2.3



FONTE: O autor

Assim, em cada subintervalo formamos o produto $f(c_i).\Delta x_i$. Então S_n representa a soma das áreas nos n retângulos

$$S_n = f(c_1).\Delta x_1 + f(c_2).\Delta x_2 + \ldots + f(c_n).\Delta x_n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$$

Esta soma, que depende da partição P e da escolha dos números c_i, é uma *soma de Riemann para f no intervalo* [a, b].

Definição 3.2.1 (A integral definida como limite de somas de Riemann) Seja f uma função definida em um intervalo fechado [a, b]. Para qualquer partição P de [a, b], escolha os números c_i arbitrariamente nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Se houver um número S tal que:

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$$

independentemente de como P e os c_i forem escolhidos, então f será integrável em [a, b] e S será a integral definida de f em [a, b].

Os resultados apresentados por Riemann acabaram sendo uma ferramenta fundamental, usada por Einstein, cerca de 50 anos depois, para desenvolver a Teoria da Relatividade.

3.2 ÁREA SOB UMA CURVA

A soma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$ que é a soma das áreas dos retângulos (figura 58), fornece uma estimativa para a área da região entre a curva e o eixo x desde a até b. Como os retângulos dão uma aproximação cada vez melhor da região, à medida que usamos partições com normas cada vez menores, a aplicação de limite à soma de Riemann nos fornece o valor da área da região (figura 57).

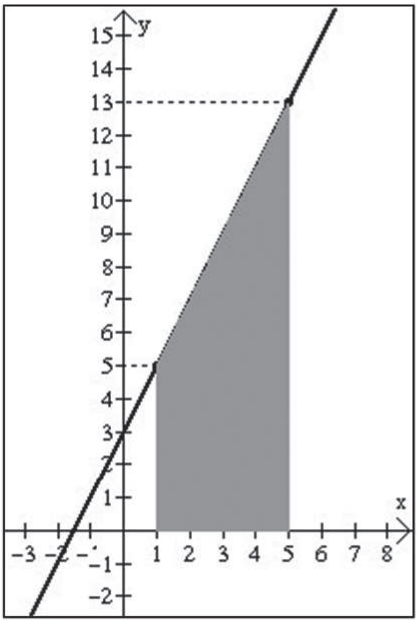
Definição 3.2.1 (Área sob uma curva) Se y = f(x) for não negativa e integrável em um intervalo fechado [*a*, *b*], então a área sob a curva y = f(x) desde *a* até *b* será a integral de *f* de *a* até *b*,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Exemplo 1:

Calcule a área sob a função f(x) = 2x + 3 no intervalo fechado [1, 5].

FIGURA 61 – GRÁFICO 2.4



FONTE: O autor

Resolução:

Vamos aplicar a Definição 2.2.2, mesmo que não tenha sido mostrado como se calcula a integral definida: este exemplo não tem a finalidade de mostrar as etapas com cálculo da integral, mas comprovar seu resultado. Então,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = \int_1^5 (2x+3)\,dx$$

$$A = \left(x^2 + 3x\right)\Big|_1^5$$

$$A = 40 - 4$$

A = 36 u.a. (unidades de área)

Agora, a fim de verificar o resultado acima, vamos calcular a área da região sob a função utilizando nossos conhecimentos de Geometria. Pelo gráfico da função (figura 60), percebe-se que a região cinza tem a forma de um trapézio retângulo. Assim, pela fórmula da área do trapézio a área.

$$A = \frac{(B+b).h}{2}$$

$$A = \frac{(13+5).4}{2}$$

$$A = 36 \text{ u.a.}$$

Com os dois cálculos é possível observar que a integral fornece de fato o valor da área, não sendo mais uma aproximação.

Historicamente, a expressão "f(x) dx" era interpretada como uma área infinitesimal de um retângulo de altura f(x) e base infinitesimal dx. Então, a área total sob a curva era obtida somando essas áreas infinitesimais. O símbolo $\int$ é um "S" espichado que era usado para indicar essa soma. Para nós, o símbolo $\int$ de integral e o símbolo dx podem servir para lembrar que a integral definida é realmente o limite de somatório quando $\Delta xi \to 0$.

Teorema 2.2.1 Se f é contínua sobre [a, b], então f é integrável em [a, b].

4 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Definição 3.2.3 Se f for integrável em [a, b], definimos $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 3.2.1 Se f e g forem integráveis em [a, b] e se k for uma constante, então k. f, f + g, f - g, são integráveis em [a, b] e

$$\int_a^b \text{k}.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 3.2.2 Se a < c < b e f for integrável em um intervalo fechado [a, b] contendo três pontos a, b, c, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

Teorema 3.2.3

(i) Se f for integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \cdot$$

(ii) Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

5 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Teorema 3.2.4 (Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1) Se f é contínua sobre $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em todo ponto x em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Interpretando a equação diferencial $\frac{dF}{dx} = f(x)$, ela tem uma solução para toda função contínua f, e toda função contínua f é derivada de alguma outra função, isto é, $\int_a^x f(t)\,dt$.

Teorema 3.2.5 (Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2) Se f é contínua em todo ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo mostra como calcular integrais definidas a partir de primitivas.

Exemplo 1:

Calcule a integral definida $\int_{-1}^{1}(2x+1)^2\,dx$.

Resolução:

Para resolver a integral definida, aplicaremos as propriedades da integral definida e o Teorema 2.4.2.

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)^2\,dx = \int_{-1}^{1}\left(4x^2+4x+1\right)dx$$

Desenvolvendo o produto notável

$$= \int_{-1}^{1}4x^2\,dx + \int_{-1}^{1}4x\,dx + \int_{-1}^{1}1\,dx$$

Propriedades da integral difinida

$$= \left.\frac{4x^3}{3}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{4x^2}{2}\right|_{-1}^{1} + \left.x\right|_{-1}^{1}$$

Primitica de f - tabela de integrais imediatas

$$= \frac{4.1^3}{3} - \frac{4.(-1)^3}{3} + 2.1^2 - 2.(-1)^2 + 1 - (-1)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 2 - 2 + 1 + 1$$

$$= \frac{8}{3} + 2$$

$$= \frac{14}{3}$$

Portanto, $\int_{-1}^{1}(2x+1)^2\,dx = \frac{14}{3}$.

A resolução apresentada acima pode ser feita sem aplicar a propriedade da integral definida (linha 2 da resolução). E, naturalmente, chega-se ao mesmo resultado.

Exemplo 2:

Calcule a integral definida $\int_{-3}^{0}\left(x^2-4x+7\right)dx$.

Resolução:

$$\int_{-3}^{0}\left(x^2-4x+7\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+7x\right)\Bigg|_{-3}^{0}$$ Primitiva de *f* - tabela de integrais imediatas

$$=\frac{0^3}{3}-2.0^2+7.0-\left(\frac{(-3)^3}{3}-2.(-3)^2+7.(-3)\right)$$ Teorema 2.4.2

$$=-(-9-18-21)$$

$$=48$$

Portanto, $\int_{-3}^{0}\left(x^2-4x+7\right)dx=48$

Exemplo 3:

Calcule a integral definida $\int_{1}^{8}\left(5\sqrt[3]{x}-\frac{6}{x^2}\right)dx$.

Resolução:

Para resolver esta integral definida, primeiro temos que reescrever a função integrante para usar a tabela de integrais imediatas e depois o Teorema 2.4.2.

$$\int_{1}^{8}\left(5\sqrt[3]{x}-\frac{6}{x^2}\right)dx=\int_{1}^{8}\left(5x^{1/3}-6x^{-2}\right)dx$$ Propriedades da potência

$$=\left(\frac{5x^{4/3}}{4/3}-\frac{6x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{1}^{8}$$ Primitiva de f - tabela de integrais imediatas

$$=\left(\frac{3.5x^{4/3}}{4}+6x^{-1}\right)\Bigg|_{1}^{8}$$

$$=\left(\frac{15x^{4/3}}{4}+\frac{6}{x}\right)\Bigg|_{1}^{8}$$

$$=\frac{15.8^{4/3}}{4}+\frac{6}{8}-\left(\frac{15.1^{4/3}}{4}+\frac{6}{1}\right)$$ Teorema 2.4.2

$$=60+\frac{3}{4}-\frac{15}{4}-6$$

$$=51$$

Portanto, $\int_{1}^{8}\left(5\sqrt[3]{x}-\frac{6}{x^2}\right)dx=51$

Definição 3.2.4 (Área líquida com sinal) Se uma função f for contínua em [a, b], então a área líquida com sinal A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo [a, b] é definida por

$$A = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

A expressão "área líquida com sinal" na definição anterior significa que é feita a soma da área que está acima do eixo x (área positiva) com a área que está abaixo do eixo y (área negativa). Então, esta soma é o que chamamos de área líquida com sinal. Observe no exemplo a seguir.

Exemplo 4:

Use a Definição 2.4.1 para encontrar a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = \text{sen}x$ e o intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolução:

Resolvemos a integral dada por

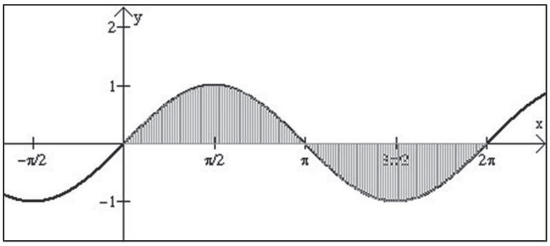
$$A = \int_0^{2\pi} \text{sen x}\, dx$$

$$A = (-\cos x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$A = -\cos 2\pi - (-\cos 0)$$

$$A = -1 + 1 = 0$$

FIGURA 62 – GRÁFICO 2.5



FONTE: O autor

A área líquida com sinal é nula. Isso se deve ao fato de ter duas regiões no intervalo $[0, 2\pi]$ com mesma área, sendo uma positiva (acima do eixo x) e outra negativa (abaixo do eixo x). Essa conclusão está de acordo com o gráfico de f mostrado na figura 61.

Exemplo 5:

Calcule a área da região mostrada no gráfico (figura 61) de $y = \text{sen x}$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolução:

No exemplo 2, a área obtida foi zero. Para ter a soma das duas áreas, aplicaremos o Teorema 2.3.2 e a Definição 2.3.1. Então,

$$A = \int_0^{2\pi} \text{sen x}\, dx$$

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen x}\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen x}\, dx$$

$$A = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$A = -\cos\pi - (-\cos 0) - [-\cos 2\pi - (-\cos\pi)]$$

$$A = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$A = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \text{ u.a.}$$

UNI

Caro(a) acadêmico(a), nas questões onde é para calcular a área total, é importante fazer um esboço do gráfico da função para ver o posicionamento da região em relação ao eixo x.

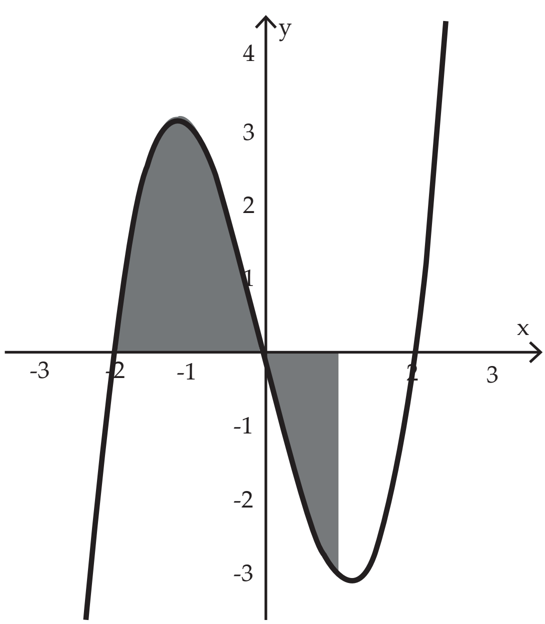
Exemplo 6:

Determine a área total da região entre a curva $y = x^3 - 4x$ e o eixo x no intervalo [-2, 1].

Resolução:

Através do gráfico (figura a seguir), percebe-se que no intervalo [-2, 1] há duas regiões (acima e abaixo do eixo x). Assim, vamos particionar o intervalo dado em dois subintervalos: [-2,0] e [0, 1]. Integramos f ao longo de cada subintervalo e somamos os valores absolutos das integrais.

FIGURA 63 – GRÁFICO 2.6



FONTE: O autor

$$A = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right)dx - \int_{0}^{1} \left(x^3 - 4x\right)dx$$ Definição 2.3.1

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$ Primitiva de *f* - tabela de integrais imediatas

$$A = \frac{0^4}{4} - 2.0^2 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2.(-2)^2\right] - \left[\frac{1^4}{4} - 2.1^2 - \left(\frac{0^4}{4} - 2.0^2\right)\right]$$ Teorema 2.4.2

$$A = -[4-8] - \left[\frac{1}{4} - 2\right]$$

$$A = \frac{23}{4}$$ u.a.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico estudamos:

- Fizemos um rápido resgate histórico do *problema da área*: como definir a área de uma região plana se ela for limitada por uma curva?

- Definimos a soma de Riemann para, em seguida, ter a integral definida: o limite aplicado à soma de Riemann, que calcula a área abaixo da curva limitada pelo eixo x.

- Enunciamos o principal resultado do Cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo, que mostra como calcular integrais definidas a partir de primitivas.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática os conhecimentos sobre as integrais definidas.

Nas questões de 1 a 6, calcule as integrais definidas:

1) $\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx$

2) $\int_1^3 \left(x^2 + 2\right) dx$

3) $\int_{-1}^1 \left(\sqrt[3]{x^4} + 4\ \sqrt[3]{x}\right) dx$

4) $\int_1^3 \left(3x^2 - 5x + 2\right) dx$

5) $\int_0^{\ell n3} 5e^x\ dx$

6) $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

7) Ache a área da região limitada pela curva $y = - x^2 + 4x$ e pelo eixo x no intervalo $1 \leq x \leq 3$..

8) Encontre a área da região limitada pela curva $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, , pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

9) Calcule a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$.

10) Encontre a área da região limitada pela curva $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

Assista ao vídeo de resolução da questão 6

TÓPICO 3

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

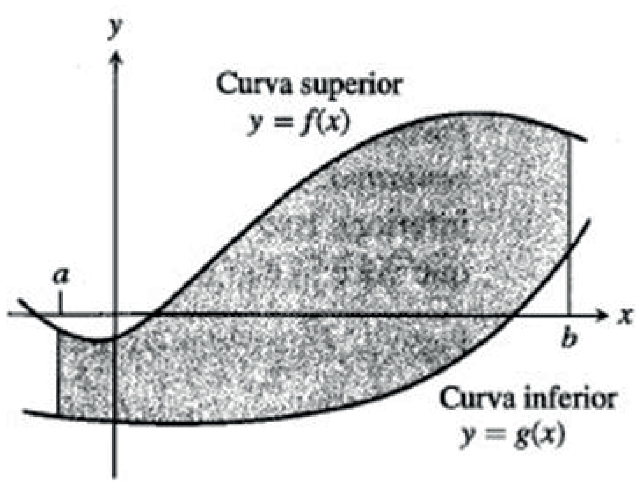
1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior aprendemos como calcular a área de uma região limitada sob uma curva através da integral definida. Agora vamos aprender a calcular a área de uma região limitada entre duas curvas.

2 ÁREA ENTRE CURVAS

Considere a região S (figura a seguir) que fica entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Suponhamos f e g funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ e para todo x em $[a, b]$.

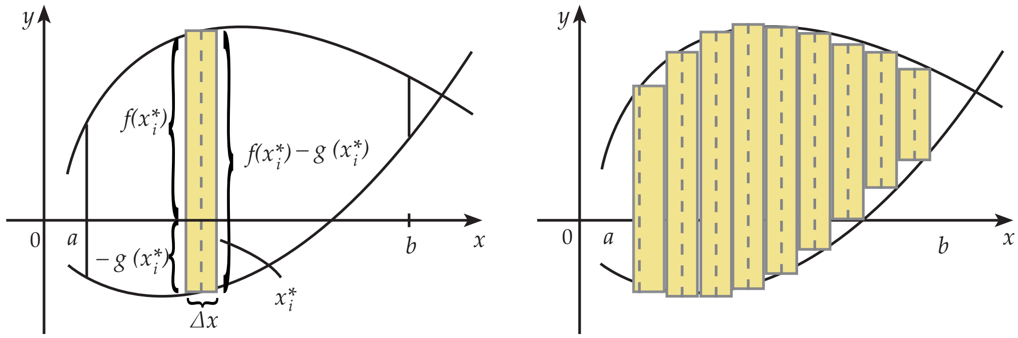
FIGURA 64 – A ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA ENTRE DUAS CURVAS



FONTE: O autor

Da mesma forma como descrito para as áreas sob as curvas, dividimos S em n faixas de mesma largura, e então calculamos o valor aproximado da faixa i-ésima através da área do retângulo de base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ (figura a seguir). Portanto, utilizaremos integrais definidas para calcular a área entre as curvas, conforme a definição a seguir.

FIGURA 65 – A ÁREA ENTRE AS CURVAS



FONTE: O autor

Definição 3.3.1 Se *f* e *g* são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de *a* até *b* é a integral de $f - g$ de *a* até *b*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,.$$

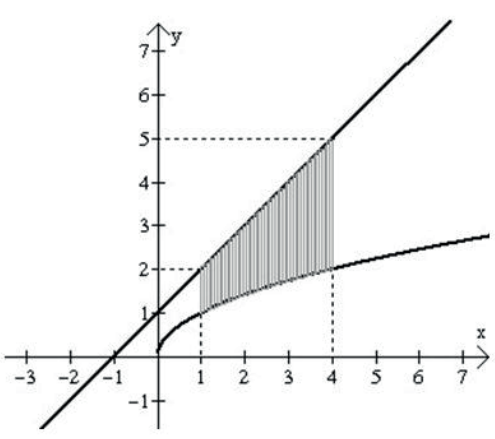
Exemplo 1:

Calcule a área da região compreendida entre as funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x + 1$, e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

Resolução:

Primeiro, fazemos um esboço do gráfico para verificar a posição das curvas no gráfico.

FIGURA 66 – GRÁFICO 3.3



FONTE: O autor

Através do gráfico (figura 65), definimos a reta como $f(x) = x + 1$ (limite superior), a curva como $g(x) = \sqrt{x}$ (limite inferior) e, a limitação em x de 1 a 4.

Assim, calcularemos a área por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$ Definição 3.1.1

$$A = \int_1^4 \left[x + 1 - x^{1/2}\right] dx$$

$$A = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_1^4$$ Primitiva de f - tabela de integrais imediatas

$$A = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_1^4$$

$$A = \frac{4^2}{2} + 4 - \frac{2.4^{3/2}}{3} - \left(\frac{1^2}{2} + 1 - \frac{2.1^{3/2}}{3}\right)$$ Teorema 2.4.2

$$A = 8 + 4 - \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$A = \frac{35}{6}$$

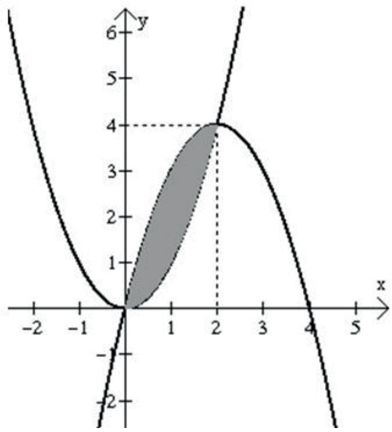
Exemplo 2:

Calcule a área da região compreendida entre as funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Resolução:

Neste enunciado há uma diferença do anterior: não são dados os limites em x. Novamente, recorreremos ao gráfico (figura a seguir).

FIGURA 67 – GRÁFICO 3.4



FONTE: O autor

Para a integral definida, consideremos a parábola como $f(x) = -x^2 + 4x$ (limite superior) e a outra parábola como $g(x) = x^2$ (limite inferior). Os limites em x são dados pelos pontos de interseção entre as curvas. Assim, igualando-se f e g, em relação a y, temos:

$x^2 = -x^2 + 4x$
$2x^2 - 4x = 0$
$x(2x - 4) = 0$
$x = 0$ ou $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ — Limites da integral definida

$$A = \int_0^2 \left[-x^2 + 4x - x^2\right] dx$$ Definição 3.1.1

$$A = \int_0^2 \left[-2x^2 + 4x\right] dx$$

$$A = \left(\frac{-2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$ Primitiva de f - tabela de integrais imediatas

$$A = \frac{-2.2^3}{3} + 2.2^2$$ Teorema 2.4.2

$$A = \frac{8}{3}$$ u.a.

Existem situações em que é complicado calcular a área com os limites em x. Nestes casos, convém integrar em y, ou seja, com os limites de integração no eixo y.

Definição 3.3.2 Se f e g são contínuas com $f(y) \geq g(y)$ ao longo de $[c, d]$, então a área da região entre as curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$ de c até d é a integral de $f - g$ de c a d:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy \,.$$

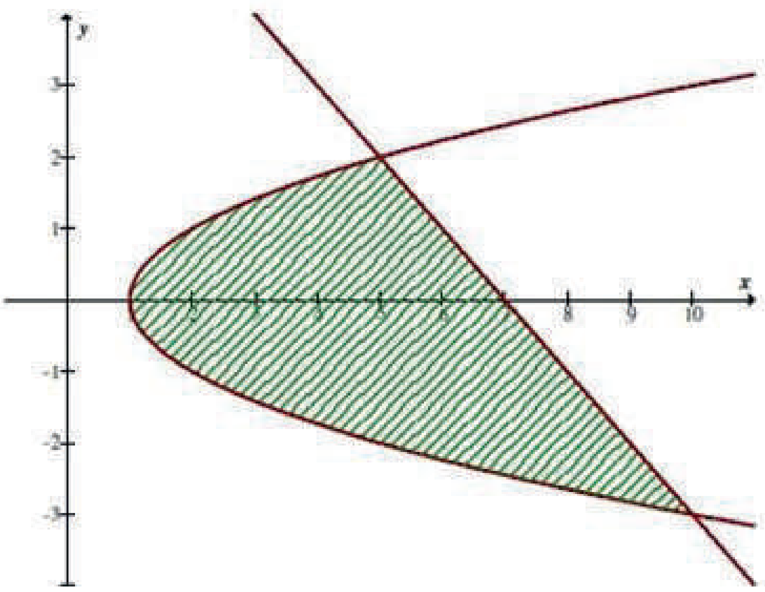
Exemplo 3:

Calcule a área da região compreendida entre as funções $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$.

Resolução:

Neste exemplo temos mais novidades: observe o gráfico (figura a seguir) e veja que, se quisermos integrar em x, precisaremos dividir a área em três regiões e assim resolvermos três integrais. Mas se resolvermos pela Definição 3.1.2, o procedimento é o mesmo do Exemplo 2, através de uma única integral.

FIGURA 68 – GRÁFICO 3.5



FONTE: O autor

Para a integral definida, consideremos $f(y) = 7 - y$ a reta (limite superior) e $g(y) = y^2 + 1$ a parábola (limite inferior). Os limites em y são dados pelos pontos de interseção entre as curvas. Assim, igualando-se f e g, em relação a y, temos:

$$y^2 + 1 = 7 - y$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$y = -3$ ou $y = 2$ — Limites da integral definida

$$A = \int_{-3}^{2} \left[7 - y - \left(y^2 + 1\right)\right] dy$$ Definição 3.1.2

$$A = \int_{-3}^{2} \left[6 - y - y^2\right] dy$$

$$A = \left(6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$ Primitiva de f - tabela de integrais imediatas

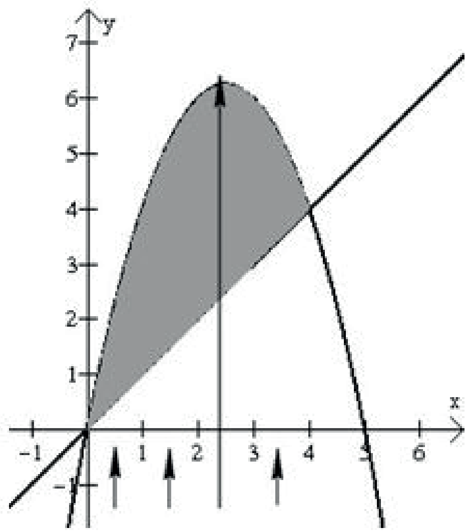
$$A = 6 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$A = 12 - 2 - \frac{8}{3} - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right)$$

$$A = \frac{125}{6}$$

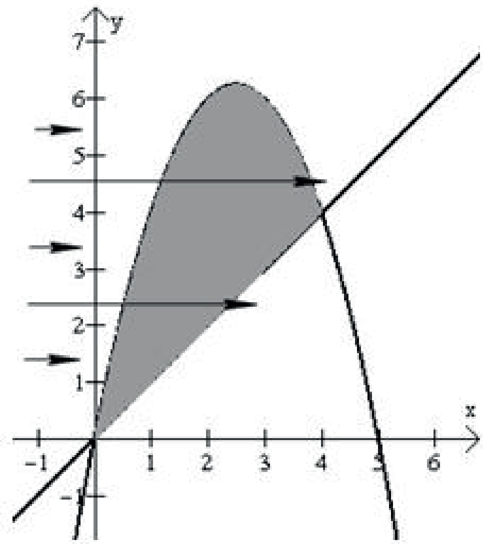
Caro(a) acadêmico(a), ao ver as duas definições e os exemplos anteriores, você pode estar se perguntando: quando devo usar a Definição 3.1.1 ou Definição 3.1.2? Vamos lhe dar uma dica para auxiliar nesta decisão. Considere uma região definida entre duas funções (figura 68a). Esta região está definida em um intervalo sobre o eixo x (figura 68a) ou sobre o eixo y (figura 68b).

FIGURA 69a – UM INTERVALO SOBRE O EIXO *X*



FONTE: O autor

FIGURA 69b – UM INTERVALO SOBRE O EIXO *Y*



FONTE: O autor

Na figura 68a consideramos o intervalo de integração no eixo x; assim, é preciso definir as duas funções que limitam a área. Desta forma, podemos utilizar setas perpendiculares ao eixo x que indicam o crescimento do valor da variável y. Neste gráfico, todas as setas tocam primeiro numa das funções (neste caso a reta) que limita a região e depois que as setas atravessam a região elas tocam a outra função (neste caso a parábola) que delimita a região.

Em contrapartida, na figura 68b consideramos o intervalo de integração no eixo y; assim, é preciso definir as duas funções que limitam a área. Utilizamos setas perpendiculares ao eixo y que indicam o crescimento do valor da variável x. Neste gráfico todas as setas perpendiculares ao eixo y tocam primeiro a parábola que limita a região. Depois que as setas atravessam a região, algumas tocam a reta, enquanto que as outras setas tocam a parábola que delimita a região. E aí seria preciso dividir a região em duas, por ter duas funções diferentes (à direita) limitando a região e, consequentemente, teria duas integrais para calcular.

Portanto, diante destas situações a melhor opção é integrar em x, conforme a figura 69, pois, do contrário teria que montar duas integrais, o que daria mais trabalho.

De acordo com a dica dada acima, retorne aos exemplos de cálculo de área entre curvas e faça uso das setas para definir o modo de calcular (integrar) a área.

3 VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

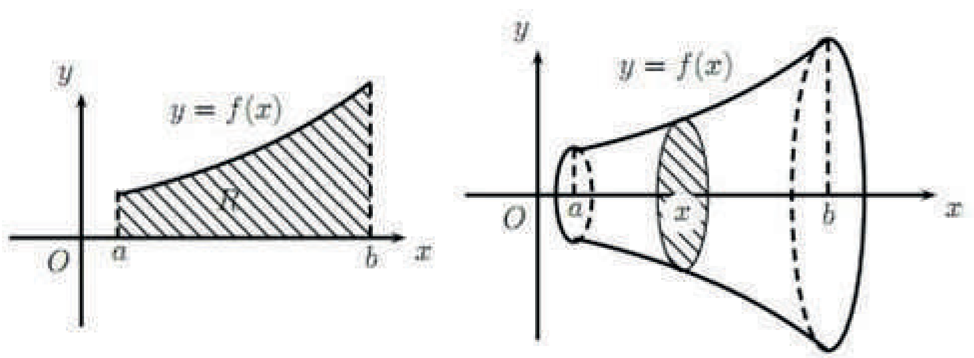
Um *sólido de revolução* é um sólido obtido pela rotação em 360º, ou seja, uma volta completa de uma região plana em torno de uma reta (eixo de revolução) que está no plano da região.

3.1 VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO *X*

Definição 3.3.3 Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se uma região R delimitada pela curva $y = f(x)$, em torno do eixo x,sendo f uma função contínua num intervalo $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, como mostra a figura a seguir. Então o volume V deste sólido é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \, .$$

FIGURA 70 – FUNÇÃO 3.6



FONTE: O autor

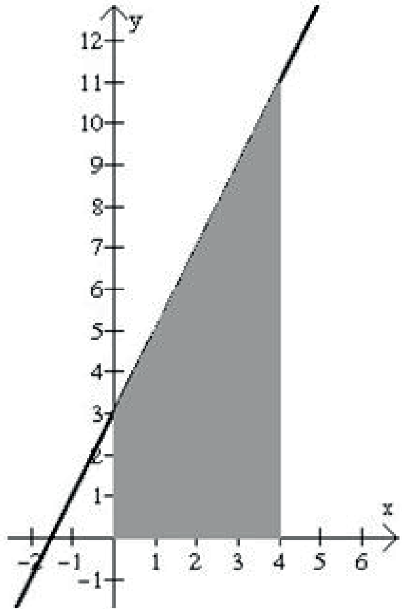
Exemplo 1:

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da área limitada por $y = 2x + 3$, $y = 0$ para $x \in [0, 4]$.

Resolução:

Observe o gráfico (figura a seguir). Ele mostra a região que é rotacionada em torno do eixo x, gerando o sólido sobre o qual calcularemos o seu volume.

FIGURA 71 – GRÁFICO 3.7



FONTE: O autor

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$ Definição 3.2.1

$$V = \pi \int_0^4 [2x + 3]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^4 \left[4x^2 + 12x + 9\right] dx$$ Desenvolvimento produto notável

$$V = \pi \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 9x \right]_0^4$$ Primitiva de *f* - tabela de integrais imediatas

$$V = \pi \left[\frac{4.4^3}{3} + \frac{12.4^2}{2} + 9.4 - \left(\frac{4.0^3}{3} + \frac{12.0^2}{2} + 9.0 \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\frac{256}{3} + 96 + 36 \right]$$

$$V = \frac{652}{3}\pi$$ u.v. (unidades de volume)

Definição 3.2.2 Sejam f(x) e g(x) funções reais de variável real contínuas em [a, b] com f(x) ≥ g(x) ≥ 0. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada em torno do eixo x pelos gráficos de y = f(x), de y = g(x), de x = a e de x = b é dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx \, .$$

Exemplo 2:

Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada pelas curvas $y = x$, $y = 2 - x^2$ e $x = 0$ gira em torno do eixo x.

Resolução:

Agora observamos no gráfico (figura 71) que a região a ser rotacionada em torno do eixo x está compreendida entre duas funções. Então, definimos a parábola como $f(x) = 2 - x^2$ (limite superior), a reta como $g(x) = x$ (limite inferior) e, a limitação em x de 0 até 1 (interseção entre as funções).

Igualando as funções para obter o ponto de interseção,

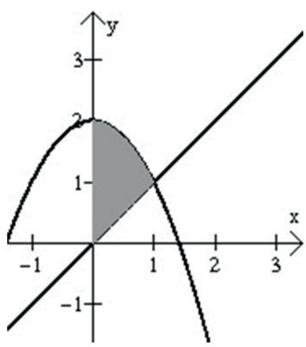
$$x = 2 - x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1}$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

FIGURA 72 – GRÁFICO 3.8



FONTE: O autor

O valor $x = -2$ não serve, pois não está compreendido entre as curvas dadas. Assim, $x = 1$.

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$ Definição 3.3.4

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left[2 - x^2\right]^2 - [x]^2 \right) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(4 - 5x^2 + x^4\right) dx$$

$$V = \pi \left(4x - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$ Primitiva de *f* - tabela de integrais imediatas

$$V = \pi \left(4.1 - \frac{5.1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - 0 \right)$$

$$V = \frac{38}{15} \pi \ \text{u.v.}$$

3.2 VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO *Y*

Definição 3.3.5 Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se uma região *R* em torno do eixo *y*, delimitada pela curva $x = f(y)$, sendo *f* uma função contínua num intervalo $[c, d]$, $f(y) \geq 0$, e pelas retas horizontais $y = c$ e $y = d$, como mostra a figura 73 a seguir. Então o volume *V* deste sólido é dado por

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy \, .$$

Exemplo 3:

Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno do eixo *y*, da região limitada pela curva $y = \dfrac{1}{x}$ e o eixo *y* no intervalo $\left[\dfrac{1}{4},\ 4\right]$.

Resolução:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$

Definição 3.3.5

$$V = \pi \int_{1/4}^{4} \left[\frac{1}{y}\right]^2 dy$$

$$V = \pi \int_{1/4}^{4} y^{-2} dy$$

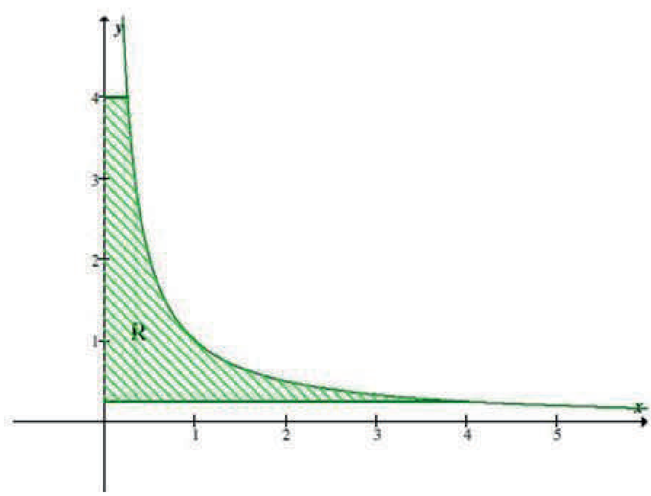
$$V = \pi \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{1/4}^{4}$$

$$V = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_{1/4}^{4}$$

$$V = \pi \left[\frac{-1}{4} - \left(\frac{-1}{1/4}\right)\right]$$

$$V = \frac{15}{4}\pi \ \text{u.v.}$$

FIGURA 73 - GRÁFICO 3.9



FONTE: O autor

Definição 3.3.6 Sejam $f(y)$ e $g(y)$ funções reais contínuas em $[c, d]$ com $f(y) \geq g(y) \geq 0$. O volume *V* do sólido de revolução gerado pela rotação *x* da região limitada pelos gráficos de $x = f(y)$, de $x = g(y)$, de $y = c$ e de $y = d$ em torno do eixo é dado por:

$$V = \pi \int_c^d \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2\right) dy \, .$$

Exemplo 4:

Determine o volume do sólido obtido pela rotação da parte da região delimitada por $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \dfrac{x}{4}$ ao redor do eixo y no primeiro quadrante.

Resolução:

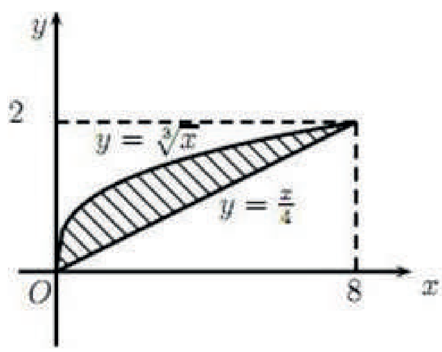
Observamos no gráfico (figura a seguir) que a região a ser rotacionada em torno do eixo y está compreendida entre duas funções. Então, definimos a curva como $f(y) = y^3$ (limite superior), a reta como $g(y) = 4y$ (limite inferior) e a limitação em y de 0 a 2 (interseção entre as funções).

Igualando as funções para obter o ponto de interseção,

$y^3 = 4y$
$y^3 - 4y = 0$
$y\,(y^2 - 4) = 0$
$y = 0$ ou $y = -2$ ou $y = 2$

O valor $y = -2$ não serve, pois não está compreendido entre as curvas dadas. Assim, $y = 0$ ou $y = 2$.

FIGURA 74 – GRÁFICO 3.10



FONTE: O autor

$$V = \pi \int_c^d \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy$$ Definição 3.2.4

$$V = \pi \int_0^2 \left([4y]^2 - [y^3]^2 \right) dy$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(16y^2 - y^6 \right) dy$$

$$V = \pi \left(\frac{16y^3}{3} - \frac{y^7}{7} \right) \Bigg|_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{16.2^3}{3} - \frac{2^7}{7} - 0 \right)$$

$$V = \frac{512}{21} \pi \text{ u.v.}$$

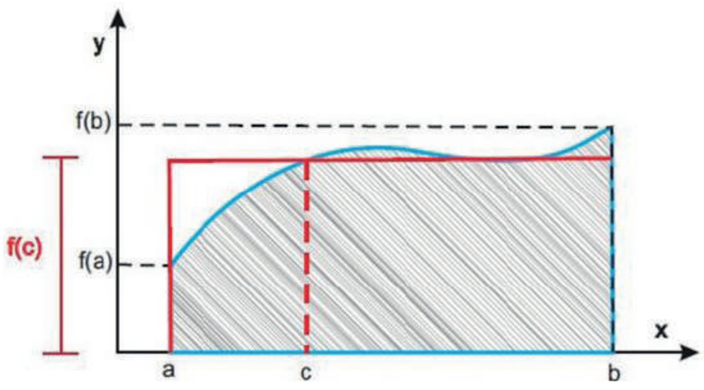
4 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

Teorema 3.3.1 Se $f(x)$ é contínua em [a, b] então, em algum ponto c em [a, b], o valor médio de f em [a, b] é definido por:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Interpretação geométrica: Se $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, então a área sob o gráfico de f é igual à área do retângulo de base b - a e altura f(c), conforme pode ser observado na figura a seguir:

FIGURA 75 – GRÁFICO 3.11



FONTE: O autor

Exemplo 1:

$f(x) = 1 + x^2$ é contínua no intervalo [-1, 2]. O Teorema do Valor Médio para as integrais diz que existe um número c em [-1, 2] tal que f(c) é o valor médio da função neste intervalo. Calcule este valor médio e encontre o valor c explicitamente.

Resolução:

Aplicamos o Teorema 3.3.1

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(c)=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}\left(1+x^2\right)dx$$

$$f(c)=\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$f(c)=\frac{1}{3}\left[2+\frac{2^3}{3}-\left(-1+\frac{(-1)^3}{3}\right)\right]$$

f(c) = 2 valor médio de f

Então o valor de c é tal que f(c) = 2. Assim,
$1 + c^2 = 2$
$c^2 = 1$
$c = \pm 1$.

Exemplo 2:

Determine o valor médio de f(x) = 4 em [0, 3] e calcule qual o ponto do domínio dado que realmente assume esse valor.

Resolução:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(c)=\frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^3 4dx-\int_0^3 xdx\right)$$

$$f(c)=\frac{1}{3}\left[4(3-0)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$f(c)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

O valor médio de f(x) = 4 - x ao longo de [0, 3] é $\frac{5}{2}$

A função assume esse valor quando 4 - x = $\frac{5}{2}$. Então x = $\frac{3}{2}$

Exemplo 3:

A lei representativa da temperatura (em graus Celsius) em uma casa, que servirá de geladeira (projeto experimental), durante um dia é dada por $T=27+5\,\mathrm{sen}\left[\frac{(t-8)\pi}{10}\right]$ onde t é o tempo em horas, com t = 0 representando meia-noite. Para a elaboração do projeto de climatização da geladeira, pede-se determinar a temperatura média diária.

Resolução:

Para calcular a temperatura média (*TM*), utilizamos o Teorema 3.3.1, fazendo

$$TM = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$TM = \frac{1}{24}\int_0^{24}\left\{27 + 5\,\mathrm{sen}\left[\frac{(t-8)\pi}{10}\right]\right\}dt$$

$$TM = \frac{1}{24}\left\{27t - \frac{50}{\pi}\cos\left[\frac{(t-8)\pi}{10}\right]\right\}\Bigg|_0^{24}$$

Aplicamos a técnica da substituição

$$TM = \frac{1}{24}\left\{27.24 - \frac{50}{\pi}\cos\left[\frac{(24-8)\pi}{10}\right] - 27.0 + \frac{50}{\pi}\cos\left[\frac{(0-8)\pi}{10}\right]\right\}$$

$$TM \cong 26{,}3\,°\mathrm{C}.$$

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico vimos:

- Calculamos área entre duas curvas: integrando em x e integrando em y:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ e } A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy .$$

- Calculamos volume de sólidos de revolução por discos perpendiculares ao eixo x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \text{ e } V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx .$$

- Calculamos volume de sólidos de revolução por discos perpendiculares ao eixo y:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\,dy \text{ e } V = \pi \int_c^d \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2\right) dy .$$

- Calculamos o valor médio de uma função por $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática os conhecimentos sobre as integrais definidas e as suas aplicações.

1) Encontre a área da região limitada acima por $y = x - 6$, abaixo por $y = x^2$ e nas laterais por $x = 0$ e $x = 2$.

2) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$.

3) Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$.

4) Determine a área do primeiro quadrante que é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ e $y = 0$.

5) Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = 2x^2 + 10$ e $y = 4x + 16$ de modo que $-2 \leq x \leq 5$.

6) Calcule a área da região limitada pelas curvas $y^2 + y - 1 = 0$ e $y - x = 0$.

7) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da área limitada por $y = \sqrt{x}$, em torno do eixo x, o eixo das abscissas e a reta $x = 4$.

8) Calcule o volume do sólido que se obtém pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo y.

9) Calcule o volume do sólido que se obtém pela rotação da região limitada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo x.

10) A região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante gira em torno do eixo y para gerar um sólido de revolução. Determine o volume do sólido.

Nas questões 11 e 12, determine o valor médio da função $f(x)$ no intervalo dado e em que ponto do domínio f realmente assume esse valor.

11) $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0, 3]$.

12) $f(x) = x^2 + x$ em $[-12, 0]$.

Assista ao vídeo de resolução da questão 9

13) Um pesquisador estima que t horas depois da meia-noite, em um período típico de 24 horas, a temperatura em certa cidade é dada por $C(t) = 3 - \frac{2}{3}(t-13)^2$, $0 \le t \le 24$ graus Celsius. Qual é a temperatura média na cidade entre 6 da manhã e 4 da tarde?

14) Um copo de limonada a uma temperatura de 40 ºF é deixado em uma sala cuja temperatura constante é de 70 ºF. Usando um princípio da Física denominado *Lei do Resfriamento de Newton*, pode-se mostrar que, se a temperatura da limonada atingir os 52 ºF em uma hora, então sua temperatura T como função do tempo decorrido pode ser modelada pela equação $T = 70 - 30e^{-0,5t}$ em que T está em graus Fahrenheit e t, em horas. Encontre a temperatura média T_m da limonada ao longo das primeiras 5 horas.

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO I

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção estudaremos uma técnica de integração que está baseada na derivação do produto. Observem o que é exposto a seguir.

Sabemos que $\int x \ dx = \frac{x^2}{2} + c$ e $\int x^2 \ dx = \frac{x^3}{3} + c$.

Assim, $\int x.x \ \mathrm{dx} \neq \int x\,dx \,.\int x\,dx$.

Isto significa que a integral de um produto geralmente não é o produto das integrais.

Daí a necessidade de buscar uma técnica de integração para integrais onde temos o produto de duas funções.

Vamos recordar como se aplica a derivada no produto de duas funções.

Sejam $\mathrm{f(x) = x}$ e $\mathrm{g(x) = sen\,x}$ funções reais e consideremos na multiplicação, obtendo x . sen x para derivarmos, utilizamos a regra da derivada do produto.

Pela tabela de derivadas temos, (u.v)´ = v.u´+ u.v´.

Escrevendo a regra acima com as funções $f(x)$ e $g(x)$, obtemos:

$$[f(x).g(x)]' = g(x).f'(x) + f(x).g'(x).$$

Substituindo as funções, temos:

$$[x.\text{sen } x]' = \text{sen } x.x' + x.(\text{sen } x)'$$

$$[x.\text{sen } x]' = \text{sen } x.1 + x.\cos x$$

$$[x.\text{sen } x]' = \text{sen } x + x.\cos x$$

Usaremos esse exemplo de motivação para deduzirmos a equação da integração por partes.

2 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis em um intervalo aberto. Temos,

$$[f(x).g(x)]' = g(x).f'(x) + f(x).g'(x) .$$

Vamos isolar o termo $f(x).g'(x)$,

$$[f(x).g(x)]' - f(x).g'(x) = g(x).f'(x)$$
$$-f(x).g'(x) = -[f(x).g(x)]' + g(x).f'(x)$$

Multiplicando a equação por (-1),

$$f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]' - g(x).f'(x) .$$

Integrando ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\int f(x).g'(x)\ dx = \int [f(x).g(x)]' dx - \int g(x).f'(x)\ dx$$
$$\int f(x).g'(x)\ dx = f(x).g(x) - \int g(x).\, f'(x)\ dx$$

Esta é a fórmula de integração por partes. Ela propicia encontrar a integral $\int f(x).g'(x)\ dx$, através da escolha correta das funções para a utilização da fórmula. Assim, a integral inicial, bastante complicada, é substituída por uma integral mais simples para ser resolvida $\int g(x).\, f'(x)\ dx$.

Costumamos escrever

$$u = f(x) \Rightarrow\ du = f'(x)\ dx$$
$$v = g(x) \Rightarrow\ dv = g'(x)\ dx$$

Então, substituindo u e v na fórmula de integração por partes, encontramos

$$\int u\ dv = u.v - \int v\ du$$

Na utilização da fórmula, o principal é a escolha apropriada de u e de dv, de tal maneira que calcular $\int v\ du$ seja mais simples do que calcular $\int u\ dv$.

Exemplo 1:

Calcule a integral $\int x \cos x \, dx$.

Resolução:

Primeiramente, para resolver esta integral devemos escolher convenientemente u e dv. Observando que a parte da integral que escolhemos para ser o u deverá ser derivado, e a outra parte (restante) o dv deverá ser integrada, escolhemos $u = x$ e $dv = \cos x \, dx$. Assim,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x \, dx = \text{sen } x.$$

Aplicando a fórmula da integração por partes, temos $\int u \, dv = u.v - \int v \, du$ e obtemos $\int x \cos x \, dx = x.\ \text{sen } x - \int \text{sen} x \, dx$.

Após a substituição na fórmula, observe que resolver a integral $\int \text{sen} x \, dx$ é mais simples que resolver a integral inicial $\int x \cos x \, dx$.

Agora calculamos a integral: $\int x \cos x \, dx = x.\ \text{sen } x - (-\cos x) + c$

Portanto, $\int x \cos x \, dx = x.\ \text{sen } x + \cos x + c$.

Exemplo 2:

Calcule a integral $\int x \, e^x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int x \, e^x \, dx$, escolhemos $u = x$ e $dv = e^x \, dx$. Assim,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int e^x \, dx = e^x$$

Aplicando na fórmula da integração por partes $\int u \, dv = u.v - \int v \, du$, obtemos

$$\int x \, e^x \, dx = x.e^x - \int e^x \, dx.$$

Após a substituição na fórmula, observe que a integral $\int e^x \, dx$ é mais simples que a integral inicial $\int x \, e^x \, dx$.

Agora calculamos a segunda integral: $\int x \, e^x \, dx = x.e^x - e^x + c$.

Exemplo 3:

Calcule a integral $\int \text{In } x \, dx$.

Resolução:

Na integral, $\int \text{In}\, x\, dx$ escolhemos u – ln x e dv = dx. Assim,

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$dv = dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int dx = x$$

Aplicando na fórmula $\int u\, dv = u.v - \int v\, du$, obtemos:

$$\int \ln x\ dx = \ln x.\, x - \int x \frac{1}{x}\ dx$$

$$\int \ln x\ dx = x.\ln x - \int dx$$

Após a substituição na fórmula, observe que a integral $\int dx$ é mais simples que a integral inicial $\int dx$.

Agora calculamos a segunda integral:

$\int \text{In}\, x\, dx = x.\text{In}\, x - x + c.$

Caro(a) acadêmico(a), observe que não há outra escolha possível para a função u, pois, na tabela das integrais imediatas, não tem a integral $\int$ In x dx.

Exemplo 4:

Calcule a integral $\int 3x\,(x+4)^{12}\,dx$.

Resolução:

Na integral, $\int 3x \cdot (x+4)^{12}\,dx$, escolhemos $u = 3x$ e $dv = (x+4)^{12}\,dx$.

Assim,

$$u = 3x \qquad \Rightarrow \qquad du = 3\,dx$$
$$dv = (x+4)^{12}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int (x+4)^{12}\,dx = \frac{(x+4)^{13}}{13}.$$

Para calcular a integral $\int (x+4)^{12}\,dx$ foi empregada a técnica de integração por substituição, fazendo $u = x+4$. Então $du = dx$ e $\int u^{12}\,du = \frac{u^{13}}{13}$. Voltando para a variável x, tem-se $\frac{(x+4)^{13}}{13}$.

Aplicando agora a fórmula $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$ obtemos:

$$\int 3x(x+4)^{12}\,dx = 3x\frac{(x+4)^{13}}{13} - \int \frac{(x+4)^{13}}{13}3\,dx$$
$$\int 3x(x+4)^{12}\,dx = \frac{3x(x+4)^{13}}{13} - \frac{3}{13}\int (x+4)^{13}\,dx$$

Após a substituição na fórmula, observe que a integral $\int (x+4)^{13}\,dx$ é mais simples que a integral inicial $\int 3x(x+4)^{12}\,dx$.

Então, calcula-se a $\int (x+4)^{13}\,dx$, utilizando novamente a técnica de integração por substituição. $\int (x+4)^{13}\,dx = \frac{(x+4)^{14}}{14}$.

$$\int 3x(x+4)^{12}\,dx = \frac{3x(x+4)^{13}}{13} - \frac{3}{13}\frac{(x+4)^{14}}{14} + c$$

$$\int 3x(x+4)^{12}\,dx = \frac{3x(x+4)^{13}}{13} - \frac{3(x+4)^{14}}{182} + c$$

Observe que neste método temos que resolver pelo menos duas integrais. E, muitas vezes, necessitaremos utilizar mais de uma técnica para calcular tais integrais: precisaremos utilizar a integração por substituição ou mesmo aplicar novamente a técnica de integração por partes até chegarmos a uma integral imediata (que esteja na tabela de integração).

Portanto, na integral acima foram utilizadas duas técnicas de integração: por partes e por substituição.

Exemplo 5:

Calcule a integral $\int x \text{ sen } (6x)\, dx$.

Resolução:

Na integral, $\int x \text{ sen } (6x)\, dx$ escolhemos $u = x$ e $dv = \text{sen}(6x)\, dx$. Assim,

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \text{sen}(6x)\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \text{sen}(6x)\, dx = -\frac{1}{6}\cos(6x).$

Para calcular a integral $\int \text{sen } (6x)\, dx$ foi empregada a técnica de integração por substituição, fazendo $u = 6x$ então $du = 6\, dx$. Assim, temos:

$\frac{1}{6}\int \text{sen}\, u\, du = -\frac{1}{6}\cos u$ e, voltando para a variável x, tem-se $-\frac{1}{6}\cos(6x)$.

Aplicando na fórmula $\int u\, dv = u.v - \int v\, du$, obtemos:

$$\int x\,\text{sen}(6x)\, dx = x\left[-\frac{1}{6}\cos(6x)\right] - \int\left[-\frac{1}{6}\cos(6x)\right] dx$$

$$\int x\,\text{sen}(6x)\, dx = -\frac{1}{6}x\cos(6x) - \left(-\frac{1}{6}\right)\int \cos(6x)\, dx$$

$$\int x\,\text{sen}(6x)\, dx = -\frac{1}{6}x\cos(6x) + \frac{1}{6}\int \cos(6x)\, dx$$

Após a substituição na fórmula, observe que a integral $\int \cos(6x)\, dx$ é mais simples que a integral inicial $\int x \operatorname{sen}(6x)\, dx$.

Então, calcula-se, $\int \cos(6x)\, dx$ utilizando novamente a técnica de integração por substituição. $\int \cos(6x)\; dx = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x)$.

$$\int x \operatorname{sen}(6x)\; dx = -\frac{1}{6}x\cos(6x) + \frac{1}{6}.\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x) + c$$

$$\int x \operatorname{sen}(6x)\; dx = -\frac{1}{6}x\cos(6x) + \frac{1}{36}\operatorname{sen}(6x) + c$$

Portanto, na integral acima foram utilizadas duas técnicas de integração: por partes e por substituição.

Exemplo 6:

Calcule a integral $\int 4x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.

Resolução:

Na integral $\int 4x^2 \operatorname{sen} x\, dx$, escolhemos $u = 4x^2$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Assim,

$u = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 8x\, dx$

$dv = \operatorname{sen} x dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x.$

Aplicando a fórmula $\int u\, dv = u.v - \int v\, du$, obtemos

$$\int 4x^2 \operatorname{sen} x\; dx = 4x^2.(-\cos x) - \int (-\cos x).8x\; dx$$

$$\int 4x^2 \operatorname{sen} x\; dx = -4x^2.\cos x + \int 8x\cos x\; dx$$

Após a substituição na fórmula, observe que a integral $\int 8x \cos x\, dx$ é mais simples que a integral inicial $\int 4x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.

Agora calculamos a segunda integral novamente por partes. Na integral $\int 8x \cos x\, dx$ escolhemos $u = 8x$ e $dv = \cos x\, dx$. Desta vez fazemos:

u = 8x $\Rightarrow$ du = 8 dx
dv = cos x dx $\Rightarrow$ v = $\int$ cosx dx = sen x.

Aplicando a fórmula $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$, obtemos:

$$\int 8x\cos x\;dx = 8x.\,\mathrm{sen}x - \int(\mathrm{sen}x).8\;dx$$

$$\int 8x\cos x\;dx = 8x.\,\mathrm{sen}x - 8\int \mathrm{sen}x\;dx$$

$$\int 8x\cos x\;dx = 8x.\,\mathrm{sen}x - 8(-\cos x)$$

$$\int 8x\cos x\;dx = 8x.\,\mathrm{sen}x + 8\cos x$$

Juntando o resultado desta integral à integral inicial, temos:

$$\int 4x^2\,\mathrm{sen}\,x\;dx = -4x^2.\cos x + [8x.\,\mathrm{sen}x + 8\cos x] + c$$

$$\int 4x^2\,\mathrm{sen}\,x\;dx = -4x^2.\cos x + 8x.\,\mathrm{sen}x + 8\cos x + c$$

Portanto, na integral acima foram utilizadas duas técnicas de integração: por partes (duas vezes) e por substituição.

3 INTEGRAIS ENVOLVENDO POTÊNCIAS DE SENO E COSSENO

Estudaremos algumas integrais trigonométricas na forma de potências e produtos de funções trigonométricas. Serão apresentadas algumas fórmulas que auxiliarão na resolução das integrais do tipo $\int \mathrm{sen}^m x \cos^n x\,dx$.

Como a resolução destas integrais difere conforme os valores de m e n, vamos estudar cada caso separadamente.

3.1 *m* ímpar

Se m é ímpar, a potência do seno é ímpar ($m = 2k + 1$), podemos separar um fator seno e utilizar a identidade trigonométrica conhecida como relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Assim, conseguimos expressar os fatores remanescentes em termos de cosseno.

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^m x \cos^n x \, dx &= \int \text{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx \\
&= \int \text{sen}^{2k} x \, \text{sen}\, x \cos^n x \, dx \\
&= \int \left(\text{sen}^2 x\right)^k \text{sen}\, x \cos^n x \, dx \\
&= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x \, \text{sen}\, x \, dx
\end{aligned}$$

Agora, faça uma substituição $u = \cos x$.

Exemplo 1:

Calcule a integral $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$, vamos aplicar o procedimento descrito acima para $m = 3$ e $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \text{sen}^{2+1} x \cos^2 x \, dx \\
&= \int \text{sen}^2 x \, \text{sen}\, x \cos^2 x \, dx \\
&= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \, \text{sen}\, x \, dx \\
&= \int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right) \text{sen}\, x \, dx \\
&= \int \left(\cos^2 x \, \text{sen}\, x - \cos^4 x \, \text{sen}\, x\right) dx \\
&= \int \cos^2 x \, \text{sen}\, x \, dx - \int \cos^4 x \, \text{sen}\, x \, dx
\end{aligned}$$

Nas duas integrais, substituímos u = cos x

$$= \int -u^2 \; du - \int -u^4 \; du \qquad\qquad u = \cos x$$

$$= -\int u^2 \; du + \int u^4 \; du \qquad\qquad du = -\text{sen}\, x \; dx$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c \qquad\qquad -du = \text{sen}\, x \; dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

Portanto, $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x \; dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$.

3.2 *n* ímpar

Quando n é ímpar, agora a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), e podemos separar um fator cosseno e utilizar a identidade trigonométrica $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, assim expressamos os fatores remanescentes em termos de seno.

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x \; dx = \int \text{sen}^m x \cos^{2k+1} x \; dx$$

$$= \int \text{sen}^m x \cos^{2k} x \cos x \; dx$$

$$= \int \text{sen}^m x \left(\cos^2 x\right)^k \cos x \; dx$$

$$= \int \text{sen}^m x \left(1 - \text{sen}^2 x\right)^k \cos x \; dx$$

Agora, faça uma substituição $u = \text{sen}\, x$.

Exemplo 2:

Calcule a integral $\int \text{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int$ $\text{sen}^2\, x \cos^5\, x\, dx$, vamos aplicar o procedimento descrito acima para $m = 2$ e $n = 5$.

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^2 x \cos^5 x\ dx &= \int \text{sen}^2 x \cos^{4+1} x\ dx \\
&= \int \text{sen}^2 x \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x\, dx \\
&= \int \text{sen}^2 x \left(1 - \text{sen}^2 x\right)^2 \cos x\ dx \\
&= \int \left(1 - 2\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x\right)\ \text{sen}^2 x \cos x\, dx \\
&= \int \left(\text{sen}^2 x \cos x - 2\,\text{sen}^4 x \cos x + \text{sen}^6 x \cos x\right) dx \\
&= \int \text{sen}^2 x \cos x\ dx - 2 \int \text{sen}^4 x \cos x\ dx + \int \text{sen}^6 x \cos x\, dx
\end{aligned}$$

Nas duas integrais, substituímos $u = \text{sen x}$

$$= \int u^2\ du - 2\int u^4\ du + \int u^6\ du \qquad\qquad u = \text{sen}\, x$$

$$= \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \qquad\qquad du = \cos x\ dx$$

$$= \frac{\text{sen}^3 \text{x}}{3} - \frac{2\,\text{sen}^5 \text{x}}{5} + \frac{\text{sen}^7 \text{x}}{7} + c$$

Portanto, $\int \text{sen}^2\ x \cos^5 \text{x}\ dx = \dfrac{\text{sen}^3 \text{x}}{3} - \dfrac{2\,\text{sen}^5 \text{x}}{5} + \dfrac{\text{sen}^7 \text{x}}{7} + c$.

3.3 *m*, *n* par

Quando m e n forem pares, as potências de seno e cosseno são pares, e podemos utilizar as identidades trigonométricas dos arcos-metade

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \qquad\qquad \cos^2 \text{x} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\,\text{x}\right).$$

Assim, expressamos os fatores remanescentes em termos de seno.

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x \; dx = \int \text{sen}^{2k} x \cos^{2k} x \; dx$$

$$= \int \left(\text{sen}^2 x\right)^k \left(\cos^2 x\right)^k \; dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\right]^k \left[\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right]^k \; dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right]^k \; dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)\right]^k \; dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1-\cos^2 2x\right)^k \; dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^k \int \left(1-\cos^2 2x\right)^k \; dx$$

Agora, desenvolva a potência $(1-\cos^2 2x)^k$ e, em seguida, resolva as integrais por substituição.

Exemplo 3:

Calcule a integral $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$, vamos utilizar as identidades sugeridas acima.

$$\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \; dx = \int \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \; dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)\left(1+\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \int \cos^2 2x \, dx\right]$$

No membro da esquerda, temos três integrais para resolver. A primeira é imediata, a segunda sai com uma substituição $u = 2x$ e a terceira aplicamos a fórmula de redução.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \ dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2.2}\cos 2x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{4}\cos 2x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cos 2x \operatorname{sen} 2x\right] + c$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\cos 2x \operatorname{sen} 2x + c$$

Portanto, $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \ dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\cos 2x \operatorname{sen} 2x + c$.

Os procedimentos apresentados neste tópico não são a única maneira de resolver tais integrais. Podem ser utilizadas outras identidades trigonométricas para tornar as integrais mais simples. Aparentemente, essa utilização ocasionará em primitivas aparentemente diferentes, mas não é verdade: as primitivas serão as mesmas e elas apenas diferenciaram na apresentação. Algumas manipulações algébricas mostrarão que será possível ver que se trata da mesma função primitiva. Isto pode ocorrer com os exercícios propostos, isto é, as respostas que você encontrar podem eventualmente estar um pouco diferentes da resposta apresentada no final da unidade. Sugiro que verifique a igualdade entre a função primitiva encontrada e a fornecida como resposta. Bons estudos!!!

4 INTEGRAIS DE REDUÇÃO OU RECORRÊNCIA

A integração de funções potências trigonométricas é resolvida usando a técnica de integração por partes e, quando a função é seno ou cosseno, existem as fórmulas de redução ou recorrência para expoentes maiores ou iguais a dois.

Para as integrais:

$\int \operatorname{sen}^n u \, du$ e $\int \cos^n u \, du$, sendo n inteiro e positivo.

Através da integração por partes, deduzem-se as seguintes fórmulas:

$$\int \text{sen}^n u \; du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}u \; du, \; n \in IN^*$$

$$\int \cos^n u \; du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \;\text{sen}\, u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}u \; du, \; n \in IN^*$$

Vamos mostrar alguns exemplos dessas integrais.

Exemplo 1:

Calcule a integral $\int \text{sen}^2 x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int \text{sen}^2 x \, dx$, vamos aplicar a fórmula de recorrência para $n = 2$.

$$\int \text{sen}^2 x \; dx = -\frac{1}{2}\text{sen}\, x \cos x + \frac{1}{2}\int \text{sen}^0 x \, dx$$

$$\int \text{sen}^2 x \; dx = -\frac{1}{2}\text{sen}\, x \cos x + \frac{1}{2}\int dx$$

$$\int \text{sen}^2 x \; dx = -\frac{1}{2}\text{sen}\, x \cos x + \frac{1}{2}x + c$$

Exemplo 2:

Calcule a integral $\int \cos^3 x \, dx$.

Resolução:

Na integral $\int \cos^3 x \, dx$, vamos aplicar a fórmula de recorrência para $n = 3$.

$$\int \cos^3 x \; dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \;\text{sen}\, x + \frac{2}{3}\int \cos x \, dx$$

$$\int \cos^3 x \; dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \;\text{sen}\, x + \frac{2}{3}\text{sen}\, x + c$$

UNI

Observe que em situações onde o valor de n for maior que 3 é necessário aplicar novamente a fórmula na integral do segundo membro.

Nestas integrais podem ocorrer também situações em que temos uma constante multiplicando o argumento das funções trigonométricas. Por exemplo, $\int \text{sen} 4\ 5x\ dx$. Então o procedimento é: primeiro fazer uma substituição u = 5x e, em seguida, aplicar a fórmula de redução.

Assim, podemos reescrever as fórmulas apresentadas acima para esses casos.

$$\int \text{sen}^n au\ du = -\frac{1}{an}\text{sen}^{n-1} au \cos au + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} au\ du,\ n \in IN^*$$

$$\int \cos^n au\ du = \frac{1}{an}\cos^{n-1} au\ \text{sen}\ au + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} au\ du,\ n \in IN^*$$

Exemplo 3:

Calcule a integral $\int \text{sen}^4 5x\ dx$.

Resolução:

Na integral $\int \text{sen}^4 5x\ dx$, vamos aplicar a fórmula de recorrência para $n = 4$ e $a = 5$.

$$\int \text{sen}^4 5x\ dx = -\frac{1}{5.4}\text{sen}^3\ 5x \cos 5x + \frac{3}{4}\int \text{sen}^2 5x\ dx\ .$$

Conforme já comentado, na integral do segundo membro teremos que aplicar novamente a fórmula de recorrência.

$$\int \text{sen}^4 5x\ dx = -\frac{1}{20}\text{sen}^3\ 5x \cos 5x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{5.2}\text{sen}\ 5x \cos 5x + \frac{1}{2}\int \text{sen}^0 5x\ dx\right]$$

$$\int \text{sen}^4 5x\ dx = -\frac{1}{20}\text{sen}^3\ 5x \cos 5x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{10}\text{sen}\ 5x \cos 5x + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$\int \text{sen}^4 5x\ dx = -\frac{1}{20}\text{sen}^3\ 5x \cos 5x - \frac{3}{40}\text{sen}\ 5x \cos 5x + \frac{3}{8}\int dx$$

$$\int \text{sen}^4 5x\ dx = -\frac{1}{20}\text{sen}^3\ 5x \cos 5x - \frac{3}{40}\text{sen}\ 5x \cos 5x + \frac{3}{8}x + c$$

DICAS

A integração requer bastante habilidade algébrica com as relações e identidades trigonométricas. Sugiro que consultem o livro: IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar**. Trigonometria. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico você viu:

- A técnica de integração por partes. Vamos recordar as etapas do método. As integrais têm a seguinte forma:

$$\int f(x).g(x)\ dx\ .$$

Passo 1: A escolha conveniente para u e dv, isto é, u = f(x) e dv = g´(x) dx.

Passo 2: Calcule $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$ e $\int dv = \int g'(x)\ dx$.

Passo 3: Faça a substituição:

$$u = f(x) \ \Rightarrow \ du = f'(x)\ dx$$
$$dv = g'(x)\ dx \ \Rightarrow \ v = g(x)$$

na fórmula de integração por partes;

$$\int u\ dv = u.v - \int v\ du.$$

Passo 4: Calcule a integral do segundo membro, se possível.

Passo 5: Se a integral do segundo membro não ficou como uma integral imediata, então aplique alguma técnica conveniente.

- Estudou três procedimentos para o produto de potências de seno e cosseno.

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$	Procedimento	Identidades trigonométricas
m ímpar	• Separe um fator de sen x. • Aplique a identidade trigonométrica. • Faça a substituição $u = \cos x$.	$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
n ímpar	• Separe um fator de cos x. • Aplique a identidade trigonométrica. • Faça a substituição $u = \operatorname{sen} x$.	$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
m, n par	• Use as identidades trigonométricas para reduzir as potências de sen x e cos x.	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

- Estudou a técnica de integração trigonométrica. As fórmulas de redução

$$\int \text{sen}^n au \;\; du = -\frac{1}{an}\text{sen}^{n-1} au \cos au + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} au \;\; du, \;\; n \in IN^*$$

$$\int \cos^n au \;\; du = \frac{1}{an}\cos^{n-1} au \;\text{sen}\, au + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} au \;\; du, \;\; n \in IN^*$$

AUTOATIVIDADE

Agora é a sua vez! Resolva as integrais aplicando a técnica de integração por partes. Lembre-se das orientações dadas, o cuidado na escolha das partes u e dv para cada tipo de integral desenvolvida.

Nos exercícios 1 a 4, calcule as integrais fazendo as substituições indicadas.

1) $\int 5x\, e^{x}\, dx;\ u = 5x;\ dv = e^{x}\, dx$

2) $\int \ln(1-x)\,dx;\ u = \ln(1-x);\ dv = dx$

3) $\int t\, e^{4t}\, dt;\ u = t;\ dv = e^{4t}\, dt$

4) $\int x^{2} e^{x}\, dx;\ u = x^{2};\ dv = e^{x}\, dx$

Nos exercícios 5 a 10, calcule a integral utilizando a técnica da integração por partes.

5) $\int x \ln x^{2}\, dx$

6) $\int x^{2} e^{-x}\, dx$

7) $\int \dfrac{x^{2}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

8) $\int x(x+5)^{-14}\, dx$

9) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$

10) $\int x^{2}(2x-1)^{-7}\, dx$

Assista ao vídeo de resolução da questão 6

Nos exercícios 11 a 16, calcule as integrais trigonométricas.

11) $\int \text{sen}^3 x \ dx$

12) $\int \cos^4 x \ dx$

13) $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \ dx$

14) $\int \cos^2 4x \ dx$

15) $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \ dx$

16) $\int \text{sen}^3 7x \ dx$

TÓPICO 5

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO II

1 INTRODUÇÃO

Uma função da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p(x) e $q(x) \neq 0$ são polinômios, é chamada de função racional. Tecnicamente, é possível escrever qualquer expressão $\frac{p(x)}{q(x)}$ como uma soma de expressões racionais cujos denominadores envolvem potências de polinômios de grau não superior a 2.

2 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Em álgebra, normalmente combinamos duas ou mais frações em uma única, usando um denominador comum. Por exemplo:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+5}=\frac{3(x+5)+2(x-1)}{(x-1)(x+5)}=\frac{5x+13}{x^2+4x-5}.$$

As integrais que resolveremos nesta seção se apresentarão da seguinte forma: $\int \frac{5x+13}{x^2+4x-5}dx$, onde deveremos escrever esta integral como $\int \frac{3}{x-1}dx+\int \frac{2}{x+5}dx$, facilitando bastante a integração. Vamos estudar um método geral para a integração de funções racionais, baseado na ideia de decompor uma função racional em uma soma de funções racionais mais simples (conforme mostrado acima), que possam ser integradas pelos métodos estudados anteriormente.

Se p(x) e q(x) são polinômios e se o grau de p(x) é inferior ao de q(x), então podemos decompor a fração $\frac{p(x)}{q(x)}$ na forma: $\frac{p(x)}{q(x)} = F_1.\ F_2.\ F_3 \ldots.\ F_n$. Sendo F_k (k = 1, 2, 3, ..., n) da forma $\frac{A}{(ax+b)^n}$ ou $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$, para *A, B* e *C* números reais e *n* inteiro positivo, $ax^2 + bx + c$ é irredutível.

Se todos os fatores de q(x) são lineares, então a decomposição em frações parciais de $\frac{p(x)}{q(x)}$ pode ser determinada usando-se a seguinte regra: *REGRA DO*

FATOR LINEAR.

Para cada fator da forma $(ax + b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de *m* frações parciais:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

onde $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 1:

Calcule $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx$.

Resolução:

Fatorando o polinômio $x^2 - 2x - 3$, temos $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Os fatores $x + 1$ e $x - 3$ são lineares e aparecem na primeira potência: assim sendo, cada fator contribui com um fator na decomposição em frações parciais pela regra do fator linear. Deste modo, a decomposição tem a forma:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3},$$

onde *A* e *B* são constantes a serem determinadas. Assim, aplicando o método de Descartes, temos:

$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1)$ Multiplique os dois lados da equação por $(x+1)(x-3)$

$5x - 3 = (A + B) - 3A + B.$ Combine os termos

Por comparação, equacionamos os coeficientes para obter o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -3A + B = -3 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} A + B = 5 \\ +\ 3A - B = 3 \\ \hline 4A \quad = 8 \\ A = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A + B = 5 \\ 2 + B = 5 \\ B = 3 \end{array}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx \qquad u = x+1$$

$$= 2\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{dt}{t} \qquad du = dx$$

$$= 2\ \ln|u| + 3\ \ln|t| + c \qquad t = x-3$$

$$= 2\ \ln|x+1| + 3\ \ln|x-3| + c \qquad dt = dx$$

Portanto, $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = 2\ \ln|x+1| + 3\ \ln|x-3| + c$

Exemplo 2:

Calcule $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$.

Resolução:

Fatorando o polinômio $x^3 + x^2 - 4x - 4$, temos $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+1)(x+2)$.

Os fatores $x-2$, $x+1$, e $x+2$ são lineares e aparecem na primeira potência: assim sendo, cada fator contribui com um fator na decomposição em frações parciais pela regra do fator linear. Deste modo a decomposição tem a forma:

$$\frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

onde A, B, C são constantes a serem determinadas. Assim,

$x - 1 = A(x+1)(x+2) + B(x-2)(x+2) + C(x-2)(x+1)$.

Existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A, B, C. Tomamos valores de x que anulam os diversos fatores, como segue:

$x = 2 \quad \rightarrow \quad 1 = A.3.4$ $\qquad$ $x = -2 \quad \rightarrow \quad -3 = C.(-4)(-1)$ $\qquad$ $x = -1 \quad \rightarrow \quad -2 = B.(-3).1$

$A = \dfrac{1}{12}$ $\qquad$ $C = \dfrac{-3}{4}$ $\qquad$ $B = \dfrac{2}{3}$

$$\int \frac{x-1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}\, dx = \int \frac{1/12}{x-2}\, dx + \int \frac{2/3}{x+1}\, dx + \int \frac{-3/4}{x+2}\, dx$$

$$= \frac{1}{12}\ \ln|x-2| + \frac{2}{3}\ \ln|x+1| - \frac{3}{4}\ \ln|x+2| + c$$

Portanto, $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}\, dx = \frac{1}{12}\ \ln|x-2| + \frac{2}{3}\ \ln|x+1| - \frac{3}{4}\ \ln|x+2| + c$

Exemplo 3:

Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2}$.

Resolução:

Fatorando o polinômio $x^3 - 4x^2$, temos $x^3 - 4x^2 = x^2 .(x-4)$.

A decomposição tem a forma: $\dfrac{1}{x^3 - 4x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-4}$ onde A, B, C são constantes a serem determinadas. Assim,

$1 = Ax(x-4) + B(x-4) + Cx^2$
$1 = (A + C)x^2 + (-4A + B)x - 4B.$

Determinando os valores das constantes A, B, C pela regra prática. Tomamos valores de x que anulam os diversos fatores, como segue:

$x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = -4.B$ $\qquad$ $x = 4 \quad \rightarrow \quad 1 = 16.C$ $\qquad$ $A + C = 0$

$B = \dfrac{-1}{4}$ $\qquad$ $C = \dfrac{1}{16}$ $\qquad$ $A = \dfrac{-1}{16}$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2} = \int \frac{-1/16}{x}\, dx + \int \frac{-1/4}{x^2}\, dx + \int \frac{1/16}{x-4}\, dx$$

$$= -\frac{1}{16}\ \ln|x| - \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{16}\ \ln|x-4| + c$$

$$= -\frac{1}{16}\ \ln|x| + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16}\ \ln|x-4| + c$$

$$= \frac{1}{16}\ \ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + \frac{1}{4x} + c$$

Portanto, $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2} = \frac{1}{16}\ \ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + \frac{1}{4x} + c$

Se alguns dos fatores de $q(x)$ são quadráticos irredutíveis, então a contribuição destes fatores para essa nova decomposição em frações parciais de $\frac{p(x)}{q(x)}$ pode ser determinada a partir da seguinte regra: *REGRA DO FATOR QUADRÁTICO*.

Para cada fator da forma $(ax^2 + bx + c)^m$, a decomposição em frações parciais é formada pela soma de *m* frações parciais:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{\left(ax^2 + bx + c\right)^3} + \ldots + \frac{A_m x + B_m}{\left(ax^2 + bx + c\right)^m}$$

onde $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{m,} B_1, B_2, B_3, \ldots B_m$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 4:

Calcule $\int \frac{5\,dx}{x^3 + 4x}$.

Resolução:

Fatorando o polinômio $x^3 + 4x$, temos $x^3 + 4x = x.\,(x^2 + 4)$.

Pela regra do fator linear, o fator *x* introduz um só termo e pela regra do fator quadrático, o fator $x^2 + 4$ introduz dois termos (uma vez que $m = 2$). Deste modo a decomposição tem a forma:

Assim, $\frac{1}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$ onde *A*, *B*, *C* são constantes a serem determinadas.

$1 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$
$1 = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$

Determinando os valores das constantes A, B, C pelo método de Descartes, temos:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 4A = 5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 4A &= 5 \\ A &= \frac{5}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A + B &= 0 \\ B &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\int \frac{5\,dx}{x^3 + 4x} = \int \frac{5/4}{x}\,dx + \int \frac{-5/4\,x}{x^2 + 4}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\ \ln|x| - \frac{5}{4}.\frac{1}{2}\ \ln\left|x^2 + 4\right| + c$$

$$= \frac{5}{4}\ \ln|x| - \frac{5}{8}.\ln\left|x^2 + 4\right| + c$$

Portanto, $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{x^3 + 4x} = \frac{5}{4}\ \ln|x| - \frac{5}{8}.\ln\left|x^2 + 4\right| + c$

Exemplo 5:

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(x^2 + 2\right)^2}\,dx$.

Resolução:

O polinômio $x^2 + 2$ já é irredutível. Deste modo a decomposição tem a forma:

$\displaystyle\frac{x^3}{\left(x^2 + 2\right)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 2\right)^2}$ onde A, B, C são constantes a serem determinadas.

Assim,

$x^3 = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D$
$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + 2B + D.$

Determinando os valores das constantes A, B, C pelo método de Descartes, temos:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 2B + D = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2A + C &= 0 \\ 2.1 + C &= 0 \\ C &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2B + D &= 0 \\ 2.0 + D &= 0 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx \qquad u = x^2 + 2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} \qquad du = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln\left|x^2+2\right| - \frac{\left(x^2+2\right)^{-1}}{-1} + c \qquad \frac{1}{2}du = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln\left|x^2+2\right| + \frac{1}{x^2+2} + c$$

Portanto, $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ \ln\left|x^2+2\right| + \frac{1}{x^2+2} + c$

3 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

As integrais definidas $\int_a^b f(x)\,dx$ estudadas até esta seção são números reais e f(x) é uma função contínua no intervalo [a, b]. Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso ou conveniente considerar os casos em que a = – ∞, b = – ∞, ou *f* seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar o conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais em que a= – ∞, b = – ∞, ou *f* é descontínua em [a, b], são chamadas *Integrais Impróprias*.

Definição 3.5.1 A integral imprópria de *f* no intervalo [a, + ∞) é definida por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

UNI

Quando este limite existir, dizemos que a integral imprópria converge, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Quando o limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge, e não é atribuído nenhum valor real. Isto se aplica a todo tipo de integrais impróprias.

Exemplo 1:

Calcule a integral imprópria $\int_{3/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Resolução:

Conforme a Definição 3.5.1, substituímos o limite superior infinito por um limite finito b, e então tomamos o limite da integral resultante. Assim,

$$\int_{3/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{3/2}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{3/2}^{b} x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{3/2}^{b}$$

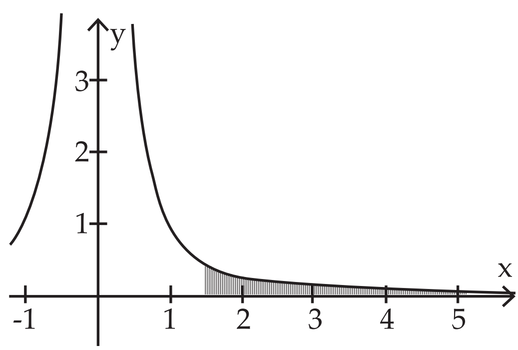
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_{3/2}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{b} - \left(\frac{-1}{3/2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{b} + \frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

FIGURA 76 – GRÁFICO 5.1



FONTE: O autor

Portanto, $\int_{3/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{3}$ e esta integral é convergente. A região mostrada no gráfico (figura 76) tem área $\frac{2}{3}$.

Definição 3.5.2 A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, b]$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Exemplo 2:

Calcule a integral imprópria $\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(5-x)^2}$.

Resolução:

Conforme a Definição 3.5.2, substituímos o limite inferior infinito por um limite finito *a*, e então tomamos o limite da integral resultante. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(5-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{3} \frac{1}{(5-x)^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{3} (5-x)^{-2}\,dx && u = 5-x \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int u^{-2}\,du && du = \ dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{5-x}\right)\Bigg|_{a}^{3} \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5-a}\right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(5-x)^2} = \frac{1}{2}$ e esta integral é convergente.

Definição 3.5.3 A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é definida por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

onde c é um número real qualquer.

Exemplo 3:

Calcule a integral imprópria $\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx$.

Resolução:

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} x\,e^{-2x}\,dx \qquad u = -2x$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^b + \frac{1}{2}\int_0^b e^{-2x}\,dx\right] \qquad du = -2\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]\Bigg|_0^b \qquad dv = e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}be^{-2b} - \frac{1}{4}e^{-2b} - \left(-\frac{1}{2}.0.e^{-2.0} - \frac{1}{4}e^{-2.0}\right)\right] \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Portanto, $\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$ e esta integral é convergente.

Definição 3.5.4 Se f for contínua no intervalo [a, b], exceto por uma descontinuidade infinita em b, então a integral imprópria de f no intervalo [a, b] é definida por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to b^-}\int_a^k f(x)\,dx.$$

Definição 3.5.5 Se f for contínua no intervalo [a, b], exceto por uma descontinuidade infinita em a, então a integral imprópria de f no intervalo [a, b] é definida por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to a^+}\int_k^b f(x)\,dx.$$

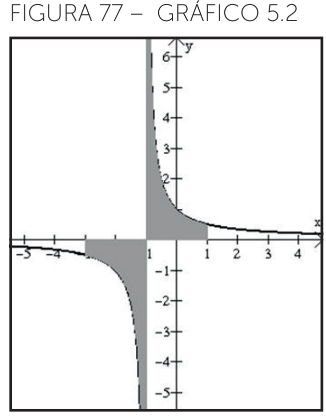
Exemplo 4:

Calcule a integral imprópria $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x+1}$.

Resolução:

Observemos que $f(x) = \frac{1}{x+1}$ é descontínua em $x = -1$ e a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical (figura 77). Assim,

FIGURA 77 – GRÁFICO 5.2



FONTE: O autor

$$\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x+1} = \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x+1} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+1}$$

$$= \lim_{k \to -1^-} \int_{-3}^{k} \frac{dx}{x+1} + \lim_{k \to -1^+} \int_{k}^{1} \frac{dx}{x+1}$$

$$= \lim_{k \to -1^-} \ln|x+1| \Big|_{-3}^{k} + \lim_{k \to -1^+} \ln|x+1| \Big|_{k}^{1}$$

$$= \lim_{k \to -1^-} \left(\ln|k+1| - \ln|-3+1|\right) + \lim_{k \to -1^+} \left(\ln|1+1| - \ln|k+1|\right)$$

$$= \infty$$

Portanto $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x+1}$ não existe e esta integral é divergente.

O texto a seguir foi extraído da internet em um site bastante completo – Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada da Universidade de São Paulo. O texto é parte de uma bibliografia de uma grande personalidade da matemática que contribuiu muito com o desenvolvimento do Cálculo.

LEITURA COMPLEMENTAR

BIOGRAFIA DE GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716)

Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha, no dia 1° de julho de 1646. Ingressou na Universidade aos 15 anos de idade e, aos 17, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal.

Aos 20 anos de idade já estava preparado para receber o título de doutor em Direito. Este lhe foi recusado por ser ele muito jovem. Deixou então Leipzig e foi receber o seu título de doutor na Universidade de Altdorf, em Nuremberg.

A partir daí, Leibniz entrou para a vida diplomática. Como representante governamental influente, ele teve a oportunidade de viajar muito durante toda a sua vida. Em 1672 foi para Paris, onde conheceu Huygens, que lhe sugeriu a leitura dos tratados de 1658 de Blaise Pascal se quisesse tornar-se um matemático. Em 1673 visitou Londres, onde adquiriu uma cópia do *Lectiones Geometricae* de Isaac Barrow e tornou-se membro da Royal Society. Foi devido a essa visita a Londres que apareceram rumores de que Leibniz talvez tivesse visto o trabalho de Newton, que por sua vez o teria influenciado na descoberta do Cálculo, colocando em dúvida a legitimidade de suas descobertas relacionadas ao assunto.

Sabemos hoje que isto não teria sido possível, dado que Leibniz, durante aquela visita a Londres, não possuía conhecimentos de geometria e análise suficientes para compreender o trabalho de Newton.

A partir daí, a Matemática estaria bastante presente nas descobertas de Leibniz. Em outra posterior visita a Londres, ele teria levado uma máquina de calcular, de sua invenção. Uma das inúmeras contribuições de Leibniz à Matemática foi o estudo da aritmética binária, que, segundo ele, havia sido utilizada pelos chineses e estaria presente no livro I Ching.

Como aconteceu com Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante no início de suas descobertas. Relacionando o triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes. A essa altura ele voltou-se para o trabalho de Blaise Pascal - *Traité des sinus du quart de cercle,* que lhe teria dado um importante *insight*: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é, a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Esse *insight* levaria Leibniz em 1676 a chegar às mesmas conclusões a que havia chegado Newton alguns anos antes: ele tinha em mãos um método muito importante devido à sua abrangência. Independente de uma função ser racional ou irracional, algébrica ou transcendente - termo criado por Leibniz -, as operações de encontrar "somas" (integrais) ou "diferenças" (diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas. O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como as nomenclaturas - Cálculo Diferencial e Cálculo Integral -, ambas utilizadas atualmente.

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1684, antes mesmo do que Newton, sob o longo título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* . Nesse trabalho apareceram as fórmulas:

$d(xy) = x\ dy = y\ dx$ (derivada do produto)

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$ (derivada do quociente)

$dx^n = n\ x^{n-1}$

Dois anos mais tarde, Leibniz publicaria no periódico *Acta Eruditorum* um trabalho sobre o Cálculo Integral. Nesse trabalho apresenta-se o problema da quadratura como um caso especial do método do inverso das tangentes.

Além do Cálculo, Leibniz contribuiu para outras áreas da Matemática. Foi ele quem generalizou o teorema do binômio em **Teorema do Multinômio**, para expansões do tipo $(x + y + z)^n$. A primeira referência do método dos determinantes no mundo ocidental também foi feita por ele. Leibniz reelaborou e desenvolveu o conceito de lógica simbólica. Contribuiu também para a teoria de probabilidades e a análise combinatória.

O peso das descobertas e contribuições de Leibniz para o Cálculo e para a Matemática como um todo é tão grande que outras importantes áreas de atuação frequentemente são deixadas de lado. Não obstante, Leibniz é considerado também um dos sete filósofos modernos mais importantes.

Em Física, Leibniz acabou negando a teoria da gravitação de Newton, pois acreditava que nenhum corpo podia entrar em movimento "naturalmente", a não ser através do contato com outro corpo que o impulsionaria. Ele também rejeitou os conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos. Junto com Huygens, Leibniz desenvolveu o conceito de energia cinética. Apesar de tudo, as suas contribuições para a ciência foram de certa forma obscurecidas por aquelas de Newton. Isto, entretanto, não o faz menos importante que Newton na descoberta do Cálculo. Na realidade, Leibniz e Newton foram os dois maiores protagonistas na descoberta desta poderosa ferramenta matemática, o Cálculo.

É sabido que Leibniz era capaz de ficar sentado na mesma cadeira por vários dias, pensando. Era um trabalhador incansável, um correspondente universal - ele tinha mais de 600 correspondentes. Era patriota, cosmopolita e um dos gênios mais influentes da civilização ocidental. Em julho de 1716 adoeceu, ficou então de cama até a sua morte, no dia 14 de novembro, em Hannover, Alemanha.

FONTE: Disponível em: <http://www.cepa.if.usp.br>. Acesso em: 19 jan. 2011.

RESUMO DO TÓPICO 5

Neste tópico estudamos e vimos que:

- Estudamos a integração de funções racionais por frações parciais e aí vimos duas regras para construir a decomposição em frações parciais.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m} \qquad \text{ou}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

- Finalizando, estudamos a integral imprópria, onde primeiro devemos resolver a integral para depois calcular o limite. Vimos duas situações das integrais impróprias.

- Integrais impróprias com limites infinitos de integração:

1) Se f(x) é contínua em $[a, +\infty)$ então $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

2) Se f(x) é contínua em $(-\infty, b]$ então $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

3) Se f(x) é contínua em $(-\infty, +\infty)$ então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

- Integrais impróprias com descontinuidades infinitas:

1) Se f(x) é contínua em $[a, b)$ então $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{k\to b^-} \int_a^k f(x)dx$

2) Se f(x) é contínua em $(a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{k\to a^+} \int_k^b f(x)dx$

AUTOATIVIDADE

Agora chegou a sua vez de colocar em prática o que foi estudado. Lembre-se das orientações dadas para o cálculo das integrais impróprias.

Nos exercícios 1 a 6, calcule as integrais indefinidas por frações parciais.

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+x-6}\,dx$

2) $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

3) $\int \frac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

5) $\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx$

6) $\int \frac{dx}{x^3+3x}$

Nos exercícios 7 a 11, calcule as integrais impróprias.

7) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

8) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

9) $\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx$

10) $\int_{2}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

11) $\int_{-1}^{0} \frac{-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1.

FINNEY, R. WEIR, M; GIORDANO, F. **Cálculo de George B. Thomas Jr**. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v. 1.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cáuculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. v. 1.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

ANOTAÇÕES